EXERCICES

DE

CALCUL NUMÉRIQUE

PAR

P. AUBERT & **G. PAPELIER**

Professeur au lycée Henri IV. Professeur au lycée d'Orléans.

TOME I

A L'USAGE DES ÉLÈVES

DE MATHÉMATIQUES A ET B, DE MATHÉMATIQUES SPÉCIALES
ET DES CANDIDATS AUX ÉCOLES
DE SAINT-CYR, NAVALE, CENTRALE, POLYTECHNIQUE
DES PONTS ET CHAUSSÉES
DES MINES DE PARIS ET DE SAINT-ÉTIENNE

PARIS

LIBRAIRIE VUIBERT

63, Boulevard Saint-Germain, 63

—

1920

avril 1944

Don
du révérend
père Lavigne, o.m.i.

EXERCICES

DE

CALCUL NUMÉRIQUE

EXERCICES

DE

CALCUL NUMÉRIQUE

PAR

P. AUBERT & **G. PAPELIER**
Professeur au lycée Henri IV. Professeur au lycée d'Orléans.

TOME I

A L'USAGE DES ÉLÈVES

DE MATHÉMATIQUES A ET B, DE MATHÉMATIQUES SPÉCIALES
ET DES CANDIDATS AUX ÉCOLES
DE SAINT-CYR, NAVALE, CENTRALE, POLYTECHNIQUE
DES PONTS ET CHAUSSÉES
DES MINES DE PARIS ET DE SAINT-ÉTIENNE

PARIS
LIBRAIRIE VUIBERT
63, Boulevard Saint-Germain, 63

1920

EXERCICES

DE

CALCUL NUMÉRIQUE

PREMIÈRE PARTIE

CALCULS ARITHMÉTIQUES

CHAPITRE I

OPÉRATIONS ABRÉGÉES

Multiplication abrégée.

1. *Évaluer à* $\frac{1}{10^p}$ *près, par défaut ou par excès, le produit de deux nombres décimaux, commensurables ou incommensurables, connus avec autant de décimales que l'on veut.*

Nous expliquerons la méthode sur un exemple. Soit à trouver le produit des deux nombres

$$\pi = 3{,}1415926535\ldots,$$
$$A = 56{,}2857642\ldots$$

à $\frac{1}{10}$ près.

1° Nous écrivons le multiplicande π comme d'habitude, et au-dessous nous plaçons le multiplicateur A en renversant l'ordre des chiffres, de manière que le chiffre de A qui indique les unités simples soit écrit au-dessous du chiffre de π qui indique les uni-

tés cent fois plus petites que celles qui correspondent à l'approximation donnée.

Dans l'exemple considéré, l'approximation indique le $\frac{1}{10}$, l'unité cent fois plus petite est le $\frac{1}{1\,000}$, nous placerons le 6 de A qui indique les unités simples au-dessous du 1 de π qui désigne les millièmes. Nous avons ainsi la disposition suivante :

$$\begin{array}{r} 3{,}1\,4\,1\,5\,\overline{9\,2\,6\,5\,3\,5}\ldots \\ \ldots\overline{2\,4\,6}\,7\,5\,8\,2{,}6\,5. \end{array}$$

Nous avons surmonté d'un trait les chiffres de π qui débordent A à droite et ceux de A qui débordent π à gauche ; ces chiffres ne sont pas utilisés dans l'opération.

2° Puis, sans tenir compte des virgules, nous multiplions le multiplicande par chaque chiffre du multiplicateur, pris à son tour comme dans la multiplication ordinaire, mais en commençant par le chiffre du multiplicande qui se trouve au-dessus de celui employé au multiplicateur.

Ainsi, nous multiplions 31 415 par 5, ce qui donne le premier produit partiel 157075, puis 3141 par 6, ce qui donne 18846, puis successivement, $314 \times 2 = 628$, $31 \times 8 = 248$, $3 \times 5 = 15$.

Nous écrivons tous ces produits partiels les uns au-dessous des autres, de manière que leurs premiers chiffres à droite soient dans une même colonne verticale, puis nous ajoutons tous ces produits.

$$\begin{array}{r} 3{,}1\,4\,1\,5\,\overline{9\,2\,6\,5\,3\,5}\ldots \\ \ldots\overline{2\,4\,6\,7}\,5\,8\,2{,}6\,5 \\ \hline 1\,5\,7\,0\,7\,5 \\ 1\,8\,8\,4\,6 \\ 6\,2\,8 \\ 2\,4\,8 \\ 1\,5 \\ \hline 1\,7\,6\,8\,1\,2 \end{array}$$

3° Dans la somme obtenue nous supprimons les deux derniers chiffres à droite, nous augmentons le dernier chiffre restant d'une unité et nous faisons exprimer au nombre ainsi obtenu, 1769, des unités de l'ordre marqué par l'approximation, c'est-à-dire des dixièmes.

Nous avons ainsi 176,9, qui est le produit des deux nombres π et A à $\frac{1}{10}$ près, par défaut ou par excès.

C'est ce qu'il nous reste à démontrer.

1° Remarquons d'abord que les différents produits partiels que nous avons calculés expriment tous des unités du même ordre, unités cent fois plus petites que celles qui correspondent à l'approximation demandée.

En effet, ces produits sont respectivement égaux à

$$\frac{31415}{10^4}\times 50,\qquad \frac{3141}{10^3}\times 6,\qquad \frac{314}{10^2}\times\frac{2}{10},$$

$$\frac{31}{10}\times\frac{8}{10^2},\qquad 3\times\frac{5}{10^3},$$

ou

$$\frac{31415\times 5}{10^3},\qquad \frac{3141\times 6}{10^3},\qquad \frac{314\times 2}{10^3},$$

$$\frac{31\times 8}{10^3},\qquad \frac{3\times 5}{10^3}.$$

Leur somme représente donc des millièmes.

2° En n'utilisant pas tous les chiffres du multiplicande, nous avons commis des erreurs par défaut égales respectivement aux produits

$$50\times 0{,}000092653 5\ldots,$$
$$6\times 0{,}0005926535\ldots,$$
$$0{,}2\times 0{,}0015926535\ldots,$$
$$0{,}08\times 0{,}0415926535\ldots,$$
$$0{,}005\times 0{,}1415926535\ldots,$$

qui sont respectivement moindres que

$$50 \times \frac{1}{10^4}, \quad 6 \times \frac{1}{10^3}, \quad \frac{2}{10} \times \frac{1}{10^2},$$

$$\frac{8}{10^2} \times \frac{1}{10}, \quad \frac{5}{10^3} \times 1.$$

La somme de ces erreurs est donc inférieure à

$$\frac{5+6+2+8+5}{10^3}, \quad \text{ou} \quad \frac{s}{10^3},$$

s désignant la somme des chiffres utilisés au multiplicateur.

3° D'autre part, en n'employant pas tous les chiffres du multiplicateur, nous avons commis une nouvelle erreur par défaut, égale au produit du multiplicande π par 0,0007642...

Or π est plus petit que 10, le second facteur est inférieur à $\frac{7+1}{10^4}$; donc cette erreur est inférieure à $\frac{7+1}{10^3}$, 7 étant le premier chiffre du multiplicateur qui déborde le multiplicande à gauche.

4° Il résulte de là que le produit obtenu 176,812 est une valeur approchée par défaut du produit exact, et que l'erreur commise est moindre que

$$\frac{s+7+1}{10^3}, \quad \text{ou} \quad \frac{\alpha+1}{10^3},$$

α désignant la somme des chiffres du multiplicateur pris en allant de droite à gauche jusques et y compris le premier chiffre qui déborde le multiplicande à gauche.

Or, en général, dans les opérations usuelles, $\alpha+1$ est inférieur à 100, par suite, $\frac{\alpha+1}{10^3}$ est inférieur à 10; l'erreur commise est donc moindre que $\frac{1}{10}$.

Le produit exact est compris entre 176,812 et 176,912 ; donc 176,9 est sa valeur à $\frac{1}{10}$ près, par défaut ou par excès.

2. Remarque I. — On peut même observer ici que $\alpha + 1 = 34$, donc l'erreur commise est moindre que $\frac{34}{10^3}$; par suite, le produit exact est compris entre 176,812 et 176,846, il vaut mieux prendre alors 176,8 comme valeur approchée par défaut.

3. Remarque II. — Si, exceptionnellement, la somme $\alpha + 1$ est supérieure à 100 et inférieure à 1 000, il faut calculer un chiffre de plus au produit. On place alors le chiffre du multiplicateur qui indique les unités simples au-dessous du chiffre du multiplicande qui indique les unités *mille* fois plus faibles que celles qui correspondent à l'approximation demandée. L'opération se fait alors de la même manière, seulement à la fin on supprime trois chiffres à la droite du produit, et on augmente le dernier chiffre restant d'une unité.

4. Remarque III. — Si le multiplicande a un nombre limité de chiffres, il peut arriver qu'un ou plusieurs chiffres du multiplicateur débordent ce multiplicande vers la droite ; dans ce cas, on placera des zéros à la droite du multiplicande et au-dessus des chiffres envisagés du multiplicateur.

5. *Calculer à* $\frac{1}{1\,000}$ *près le produit des deux nombres*

$$A = 368,57,$$
$$B = 0,543\,218\,763\ldots$$

Conformément à la méthode indiquée et à la remarque III, nous disposerons l'opération de la façon suivante :

```
       368,57000
 ...3678123 45,0
 ----------------
      18428500
       1474280
        110571
          7370
           368
           288
            21
 ----------------
      20021398
```

Le produit demandé est 200,214.

On peut aussi prendre A comme multiplicateur et B comme multiplicande ; on a l'opération suivante :

```
 0,543218763...
     75,863
 ----------------
 16296561
  3259308
   434568
    27160
     3801
 ----------------
 20021398
```

6. *Calculer* π^2 *à* $\frac{1}{10^4}$ *près.*

On écrira :

```
      3,1415926...
  ...6295141,3
```

On trouve 9,8696.

7. *Calculer le produit*

$$0{,}5623478 \times 2{,}3007125$$

à $\frac{1}{10^3}$ *près.*

On trouve 1,294.

8. *Calculer le produit*

$$4{,}5307 \times 0{,}0002518376$$

à $\frac{1}{10^6}$ *près.*

On trouve 0,001141.

Division abrégée.

9. *Évaluer à* $\frac{1}{10^p}$ *près, par défaut ou par excès, le quotient de deux nombres décimaux, commensurables ou incommensurables, connus avec autant de décimales que l'on veut.*

Comme pour la multiplication abrégée, nous exposerons la méthode sur un exemple.

Soit à calculer à $\frac{1}{10^5}$ près le quotient du nombre

$$A = 5{,}52314897\ldots$$

par le nombre

$$B = 72{,}8425\ldots$$

1° On commence par déterminer le nombre de chiffres du quotient cherché.

Comme A est compris entre $\frac{B}{100}$ et $\frac{B}{10}$, le quotient est compris entre $\frac{1}{100}$ et $\frac{1}{10}$; par suite, le premier chiffre (autre que zéro) occupera la deuxième place après la virgule. Comme le quotient doit avoir cinq chiffres décimaux, il aura quatre chiffres significatifs.

2° Désignons, d'une manière générale, par n le nombre des chiffres ainsi déterminé du quotient. Nous prenons alors sur la gauche du diviseur (sans tenir compte de la virgule) assez de

chiffres pour former un nombre supérieur ou égal à n, puis à la suite de ces chiffres nous prenons les n chiffres suivants. Le nombre formé par tous les chiffres est le *diviseur restreint.*

Ainsi, dans notre exemple, $n = 4$; comme le premier chiffre, 7, de B est supérieur à 4, nous prenons quatre chiffres à la suite de 7 ; nous obtenons le nombre 72842, qui est le diviseur restreint (*).

3° Nous formons ensuite le *dividende restreint* en prenant sur la gauche du dividende donné (sans tenir compte de la virgule) assez de chiffres pour former un nombre contenant au moins une fois et moins de dix fois le diviseur restreint.

Nous obtenons ainsi 552314.

4° Nous disposons alors l'opération comme d'habitude (en replaçant les virgules) ; les chiffres surmontés d'un trait ne seront pas utilisés.

$$\begin{array}{r|l}
5{,}52314\overline{897\ldots} & 72{,}\dot{8}\dot{4}\dot{2}\overline{5\ldots} \\ \hline
42420 & 7582 \\
6000 & 0{,}07582 \\
176 & \\
32 &
\end{array}$$

Nous divisons le dividende restreint 552314 par le diviseur restreint ; le quotient est 7 ; puis, comme dans la division ordinaire, nous multiplions le diviseur 72842 par 7 et nous retranchons le produit obtenu du dividende 552314, ce qui donne le premier dividende partiel 42420.

Nous supprimons maintenant un chiffre à la droite du diviseur restreint, le chiffre 2 (on peut indiquer cette suppression en plaçant un point au-dessus de ce chiffre) ; nous obtenons le deuxième diviseur 7284, et nous divisons le dividende partiel

(*) Si l'on avait $B = 173{,}8964\ldots$ ($n = 4$), on prendrait d'abord le nombre 17 qui est supérieur à 4, puis quatre chiffres à la suite de 17.
Le diviseur restreint serait 173896.

42420 par le deuxième diviseur : le quotient est 5. Nous faisons le produit 7284×5, et nous le retranchons du dividende partiel 42420 : ceci nous donne le deuxième dividende partiel 6000.

Nous supprimons ensuite le dernier chiffre, 4, du deuxième diviseur ; nous formons ainsi le troisième diviseur 728, et nous divisons le dividende partiel 6000 par 728 et ainsi de suite.

On continue l'opération de cette manière jusqu'à ce qu'on ait obtenu le nombre de chiffres que doit avoir le quotient.

Nous trouvons ici 7582, et comme le nombre doit exprimer des cent-millièmes, le quotient approché est 0,07582.

Il nous reste maintenant à justifier cette méthode.

Désignons par Q' ce quotient, $Q' = 0{,}07582$; nous allons démontrer que la différence

$$\frac{A}{B} - Q'$$

est moindre que $\frac{1}{10^5}$ en valeur absolue.

Soit A' le dividende restreint en tenant compte de la virgule ; nous avons

$$(1) \qquad A' = A - 0{,}00000897\ldots$$

Nous avons retranché de A' le produit BQ' diminué de la somme S des quatre produits

$$\begin{aligned} 0{,}07 &\times 0{,}0005\ldots, \\ 0{,}005 &\times 0{,}0025\ldots, \\ 0{,}0008 &\times 0{,}0425\ldots, \\ 0{,}00002 &\times 0{,}8425\ldots, \end{aligned}$$

ces produits sont respectivement inférieurs aux produits

$$\frac{1}{10} \times \frac{1}{10^3}, \qquad \frac{1}{10^2} \times \frac{1}{10^2}, \qquad \frac{1}{10^3} \times \frac{1}{10}, \qquad \frac{1}{10^4} \times 1,$$

et comme ceux-ci sont tous égaux à $\frac{1}{10^4}$, on en conclut que la somme S est inférieure à $\frac{4}{10^4}$.

Or, le numérateur 4 est justement le nombre de chiffres du quotient ; il est par hypothèse inférieur au premier chiffre 7 du diviseur B, on a donc

$$S < \frac{4}{10^4} < \frac{7}{10^4} < \frac{70}{10^5},$$

et

$$S < \frac{B}{10^5}.$$

D'autre part, en retranchant de A′ la quantité BQ′ — S, il reste 0,00032 ; on a donc

$$A' - (BQ' - S) = 0{,}00032,$$

ou, en remplaçant A′ par sa valeur (1),

$$(2) \qquad A - BQ' = -S + 0{,}00032897\ldots$$

Mais 32 est le reste d'une division dont 72 est le diviseur ; on a donc

$$32 < 72,$$

la différence entre les deux membres de l'inégalité étant au moins égale à 1. On peut alors écrire

$$32{,}897\ldots < 72,$$

ou

$$0{,}00032897\ldots < \frac{B}{10^5}.$$

Comme on a aussi $S < \frac{B}{10^5}$, on en déduit

$$|-S + 0{,}00032897\ldots| < \frac{B}{10^5},$$

et, d'après l'égalité (2),

$$|A - BQ'| < \frac{B}{10^5}.$$

Divisons par B, nous avons

$$\left|\frac{A}{B} - Q'\right| < \frac{1}{10^5},$$

et ceci montre bien que Q' est la valeur approchée de $\frac{A}{B}$ à $\frac{1}{10^5}$ par défaut ou par excès (*).

On peut dire aussi que le quotient exact est compris entre $Q' - \frac{1}{10^5}$ et $Q' + \frac{1}{10^5}$, c'est-à-dire entre 0,07581 et 0,07583.

10. Remarque. — On peut reconnaître si le quotient Q' est approché par défaut ou par excès, et obtenir dans certains cas une approximation plus grande que l'approximation demandée.

En effet, de la formule (2) nous tirons

$$\frac{A}{B} - Q' = \frac{-S + 0{,}00032897\ldots}{B}.$$

On ne peut pas calculer exactement la somme S, mais on peut toujours trouver deux nombres qui la comprennent.

Nous avons vu que S est la somme des produits

$$\begin{array}{r} 0{,}07 \times 0{,}0005\ldots, \\ 0{,}005 \times 0{,}0025\ldots, \\ 0{,}0008 \times 0{,}0425\ldots, \\ 0{,}00002 \times 0{,}8425\ldots \end{array}$$

Si nous réduisons le deuxième facteur de chaque produit à son premier chiffre significatif, nous aurons une valeur de S approchée par défaut, et si nous augmentons d'une unité ce premier chiffre, nous aurons une valeur de S approchée par excès.

Il en résulte que S sera plus grand que la somme des produits de gauche et plus petit que la somme des produits de droite

$$\begin{array}{rr} 0{,}07 \times 0{,}0005, & 0{,}07 \times 0{,}0006, \\ 0{,}005 \times 0{,}002, & 0{,}005 \times 0{,}003, \\ 0{,}0008 \times 0{,}04, & 0{,}0008 \times 0{,}05, \\ 0{,}00002 \times 0{,}8, & 0{,}00002 \times 0{,}9. \end{array}$$

(*) Cette démonstration est due à M. Camman.

On en déduit aisément

$$0{,}000093 < S < 0{,}000115.$$

On en conclut que

$$-S + 0{,}00032897\ldots$$

est positif et que, par suite, Q' est une valeur approchée par défaut du quotient $\frac{A}{B}$.

De plus, nous avons

$$\frac{A}{B} - Q' < \frac{-0{,}000093 + 0{,}00032897\ldots}{B},$$

ou $$\frac{A}{B} - Q' < \frac{0{,}00023597\ldots}{B},$$

ou encore

$$\frac{A}{B} - Q' < \frac{0{,}00028}{70},$$

ou enfin

$$\frac{A}{B} - Q' < 0{,}000004.$$

Le quotient $\frac{A}{B}$ est compris entre Q' et $Q' + \frac{4}{10^6}$, c'est-à-dire entre 0,07582 et 0,075824.

11. *Calculer* $\frac{1}{\pi}$ *à* $\frac{1}{10^9}$ *près.*

Comme $\frac{1}{\pi}$ est compris entre 1 et $\frac{1}{10}$, le premier chiffre significatif du quotient est le chiffre des dixièmes, donc le quotient aura neuf chiffres.

Nous prenons sur la gauche de π les deux premiers chiffres 31, qui forment un nombre supérieur à 9, et nous écrivons à la suite les neuf chiffres suivants ; nous avons ainsi le diviseur restreint $$31415926535.$$

Le dividende restreint se compose alors de l'unité suivie de onze zéros, et nous avons l'opération suivante :

$$
\begin{array}{r|l}
1{,}00000000000 & 3{,}1415926535 \\ \cline{2-2}
5752220395 & 318309886 \\
2610627742 & \\
97353622 & \\
3105844 & \\
278413 & \\
27093 & \\
1965 & \\
81 &
\end{array}
$$

On a donc

$$\frac{1}{\pi} = 0{,}318309886,$$

à $\frac{1}{10^9}$ près, par défaut ou par excès.

12. *En prenant* π *avec dix-sept décimales* (*),

$$\pi = 3{,}14159265358979323,$$

on peut calculer $\frac{1}{\pi}$ *à* $\frac{1}{10^{16}}$ *près.*

On obtient

$$\frac{1}{\pi} = 0{,}3183098861837906.$$

13. *Calculer* $\frac{\pi}{648}$ *à* $\frac{1}{10^{12}}$ *près.*

Le quotient aura dix chiffres ; le diviseur restreint est

$$648000000000$$

et le dividende restreint 3141592653589.

(*) Nous montrerons dans le tome II comment on peut calculer ces dix-sept décimales

3141592653589	$6\dot{4}\dot{8}\dot{0}\dot{0}\dot{0}\dot{0}\dot{0}\dot{0}\dot{0}\dot{0}\dot{0}$
549592653589	4848136811
31192653589	
5272653589	
88653589	
23853589	
4413589	
525589	
7189	
709	
61	

On a $$\frac{\pi}{648} = 0,004848136811.$$

14. *Calculer* $\frac{648}{\pi}$ *à* $\frac{1}{10^8}$ *près.*

On trouve $$\frac{648}{\pi} = 206,26480624.$$

15. *Déduire la valeur de* $\frac{648}{\pi}$ *de celle de* $\frac{\pi}{648}$ *en divisant* 1 *par* $\frac{\pi}{648}$, *et faire le calcul inverse.*

16. *Calculer à* $\frac{1}{1000}$ *près le quotient*

$$\frac{6886,7239765\ldots}{83,6729867\ldots}.$$

On trouve 82,305.

17. *Calculer à* $\frac{1}{10^4}$ *près le quotient*

$$\frac{0,547302954\ldots}{8,23401763\ldots}.$$

On trouve $\qquad 0,0664.$

18. *Calculer* $\dfrac{1}{e}$ *à* $\dfrac{1}{10^8}$ *près.*

On sait que le nombre e est égal à

$$2,718281828\ldots$$

à $\dfrac{1}{10^9}$ près par défaut.

On trouve $\qquad \dfrac{1}{e} = 0,36787944.$

19. *Calculer à* $\dfrac{1}{100}$ *près le quotient*

$$\frac{34,35859164\ldots}{0,0648275428}.$$

On trouve $\qquad 530,00.$

20. Remarque. — Il peut arriver dans la division abrégée qu'un dividende partiel D contienne 10 fois le diviseur correspondant Δ. Dans ce cas, on place au quotient le nombre 10 entre parenthèses, on retranche de D le produit 10Δ et on continue l'opération par la méthode ordinaire.

A la fin de l'opération, on remplace le (10) du quotient par 0 et on augmente d'une unité le chiffre précédent du quotient.

Soit, par exemple, à calculer à $\dfrac{1}{1000}$ près le quotient de

$$29,019468 \text{ par } 6,7489275.$$

Nous disposons l'opération comme nous l'avons dit plus haut :

$$\begin{array}{r|l}
29,0194\overline{68} & 6,7\dot{4}\dot{8}\dot{9}\overline{275} \\ \hline
2\,0238 & 42(10,0 \\
6742 & \\
2 &
\end{array}$$

Après avoir calculé les deux premiers chiffres 4 et 2 du quotient, nous obtenons le dividende partiel 6742, que nous devons diviser par 674. Le quotient est (10); nous retranchons de 6742 le produit 674×10, nous obtenons le dividende partiel suivant 2, et celui-ci divisé par 67 donne comme quotient zéro.

Si l'on refait sur cet exemple la démonstration donnée au n° 9, on voit que le quotient approché Q' est égal à

$$4 + \frac{2}{10} + \frac{10}{10^2} + \frac{0}{10^3},$$

ou à

$$4,300.$$

21. *Calculer à $\frac{1}{100}$ près le quotient*

$$\frac{3083,01627}{39,27422}.$$

On trouve $78,50.$

22. *Calculer à $\frac{1}{10^6}$ près le quotient*

$$\frac{0,02014958772}{3,731412895}.$$

On trouve $0,005400.$

Applications de la multiplication et de la division abrégée.

23. *Étant donnée la valeur d'un angle en grades, minutes et secondes centésimales, calculer sa valeur en radians.*

Soit g la valeur de l'angle en grades et r sa valeur en radians, on a

$$\frac{g}{200} = \frac{r}{\pi},$$

ou $$r = \frac{\pi}{200} \times g.$$

De la valeur de π on déduit aisément celle de $\frac{\pi}{200}$:

$$\frac{\pi}{200} = 0{,}015707963\ldots ;$$

il suffit alors de multiplier $\frac{\pi}{200}$ par g.

24. *Étant donné l'angle* $27^g 82' 53''$, *calculer sa valeur en radians.*

Nous avons $$g = 27{,}8253.$$

La valeur de r à $\frac{1}{10^4}$ près sera donnée par la multiplication abrégée suivante :

$$\begin{array}{r}
0{,}015707963\ldots \\
35\,28{,}72 \\
\hline
314158 \\
109949 \\
12560 \\
314 \\
75 \\
3 \\
\hline
437059
\end{array}$$

En utilisant la remarque du n° 2, on voit que la valeur de r est 0,4370 à $\frac{1}{10^4}$ par défaut.

25. *Calculer la valeur en radians, à* $\frac{1}{10^4}$ *près, de l'angle* $6^g{,}02$.

On trouve 0,0945.

26. *Étant donnée la valeur d'un angle en radians, calculer sa valeur en grades.*

On a $$g = \frac{200}{\pi} r.$$

De la valeur de $\frac{1}{\pi}$ calculée au n° 12 on déduit celle de $\frac{200}{\pi}$; on obtient

$$\frac{200}{\pi} = 63,661977236758\ldots;$$

on multipliera ce nombre par la valeur donnée de r.

27. *Soit* 0,5824 *la valeur d'un angle en radians, trouver sa valeur en grades et fractions de grade jusqu'à la* 4ᵉ *décimale inclusivement.*

Nous avons l'opération suivante :

$$\begin{array}{r}
63{,}6619772\ldots \\
4285{,}0 \\
\hline
31830985 \\
5092952 \\
127322 \\
25464 \\
\hline
37076723
\end{array}$$

La valeur cherchée est $37^g,0767$ à une seconde centésimale près, par défaut.

28. *Soit* 1,23 *la valeur d'un angle en radians, trouver sa valeur en grades.*

On trouve $78^g,3042$.

29. *Soit* 0,7854 *la valeur d'un angle en radians, trouver sa valeur en grades.*

Réponse : 50^g.

30. *Étant donnée la valeur d'un angle en degrés, minutes et secondes sexagésimales, calculer sa valeur en radians.*

On commencera par réduire les degrés et les minutes en secondes, et on désignera par s la valeur de l'angle exprimée en secondes sexagésimales. En appelant toujours r la valeur de l'angle en radians, on a

$$\frac{r}{\pi} = \frac{s}{180 \times 60 \times 60} = \frac{s}{648\,000},$$

ou

$$r = \frac{\pi}{648\,000} \times s.$$

De la valeur de $\frac{\pi}{648}$ calculée au n° 13 on déduit celle de $\frac{\pi}{648\,000}$; on a

$$\frac{\pi}{648\,000} = 0{,}000\,004\,848\,136\,811\ \ldots$$

On aura la valeur de r en multipliant $\frac{\pi}{648\,000}$ par s.

31. *Calculer la valeur en radians de l'angle* 15° 03′ 20″.

La valeur en secondes est 54200″.

Si nous voulons la valeur de r à $\frac{1}{10^4}$ près, nous aurons la multiplication abrégée suivante :

$$\begin{array}{r}
0{,}0000048481368\ldots \\
00245 \\
\hline
242405 \\
19392 \\
968 \\
\hline
262765
\end{array}$$

La valeur cherchée est 0,2627.

32. *Calculer la valeur en radians de l'angle* 22° 15′ 02″.

Réponse : 0,3883.

33. *Étant donnée la valeur d'un angle en radians, calculer sa valeur en degrés, minutes et secondes sexagésimales.*

On a
$$s = \frac{648\,000}{\pi} r.$$

De la valeur de $\frac{648}{\pi}$ obtenue au n° 14, on déduit celle de $\frac{648\,000}{\pi}$,
$$\frac{648\,000}{\pi} = 206264,80624\ldots,$$
et on multiplie ce nombre par r.

34. *Soit* 0,2851 *la valeur d'un angle en radians, trouver sa valeur en degrés, minutes et secondes sexagésimales.*

Nous obtiendrons la valeur en secondes à une unité près en faisant la multiplication suivante :

$$\begin{array}{r}
206264{,}80624 \\
1582{,}0 \\
\hline
4125296 \\
1650112 \\
103130 \\
2062 \\
\hline
5880600
\end{array}$$

On trouve ainsi $58806''$ ou $16^\circ\,20'\,06''$.

35. *Soit* 0,5935 *la valeur d'un angle en radians, trouver sa valeur en degrés, minutes et secondes sexagésimales.*

Réponse : $34^\circ\,0'\,18''$.

36. Remarque. — Si l'on désigne par g la valeur d'un angle en grades et par s sa valeur en secondes sexagésimales, on a la formule
$$\frac{s}{648\,000} = \frac{g}{200}, \qquad \text{ou} \qquad s = 3240\,g$$

Elle permet de calculer s si l'on connaît g, ou inversement, de calculer g si l'on connaît s.

37. *Calculer la valeur en grades de l'angle* $47^\circ\,15'\,46''$.

On trouve $52^g,5142$.

38. *Calculer la valeur en degrés, minutes et secondes sexagésimales de l'angle* $75^g,8497$.

On trouve $68^\circ\,15'\,53''$.

39. *On donne les trois nombres*

$$
\begin{aligned}
a &= 0,758432\ldots,\\
b &= 4,251789\ldots,\\
c &= 12,842197\ldots;
\end{aligned}
$$

calculer l'expression $\frac{ab}{c}$ *à* $\frac{1}{1000}$ *près.*

Première méthode. — On calcule d'abord le produit ab, puis le quotient de ab par c.

Le produit ab a un chiffre supérieur à 1 à sa partie entière, et c en a deux, dont le premier est 1 ; donc le quotient $\frac{ab}{c}$ est compris entre 0,1 et 1, il aura trois chiffres.

Par suite, le diviseur restreint est 12842.

Comme le premier chiffre de ab est supérieur à 1, le dividende restreint aura cinq chiffres ; il faut donc calculer le produit ab à $\frac{1}{10^4}$ près.

On trouve $ab = 3,2247$, et en faisant la division abrégée de ab par c, on obtient

$$\frac{ab}{c} = 0,251$$

à $\frac{1}{1000}$ près.

Deuxième méthode. — On calcule d'abord le quotient $\frac{a}{c}$, et on multiplie ce quotient par b.

On voit aisément que le quotient $\frac{a}{c}$ est compris entre 0,01 et 0,1 ; pour faire le produit $\frac{a}{c} \times b$ à $\frac{1}{1\,000}$ près, il faudra placer le chiffre 4 des unités de b sous le cinquième chiffre décimal de $\frac{a}{c}$; il faut donc calculer $\frac{a}{c}$ à $\frac{1}{10^5}$ près.

On obtient

$$\frac{a}{c} = 0{,}05905,$$

et en faisant le produit par b, on retrouve

$$\frac{ab}{c} = 0{,}251.$$

40. *Calculer* $\frac{e^2}{\pi}$ *à* $\frac{1}{10^4}$ *près.*

La valeur de e est indiquée au n° 18.

On trouve $$\frac{e^2}{\pi} = 2{,}3520.$$

41. *Calculer* $\frac{e\sqrt{2}}{\pi^3}$ *à* $\frac{1}{100}$ *près.*

On a $$\sqrt{2} = 1{,}4142135623\ldots$$

On trouve $$\frac{e\sqrt{2}}{\pi^3} = 0{,}12.$$

Racine carrée abrégée.

Dans tout ce qui va suivre il ne s'agira que de racines carrées approchées *par défaut*.

On sait que pour extraire la racine carrée d'un nombre quel-

onque à $\frac{1}{10^p}$ près, on multiplie ce nombre par 10^{2p}, on ne considère que la partie entière du produit et on extrait la racine carrée à une unité près de cette partie entière, puis, on divise cette racine par 10^p, et on obtient ainsi la racine carrée du nombre donné à $\frac{1}{10^p}$ près.

On est donc conduit dans tous les cas à l'extraction de la racine carrée d'un nombre entier à une unité près. C'est une opération bien connue, qui est exposée dans tous les traités d'arithmétique.

Nous allons indiquer ici une méthode abrégée qui repose sur le théorème suivant:

42. Théorème. — 1° *Soit* N *un nombre entier dont la racine carrée à une unité près a un nombre impair de chiffres,* $2k+1$ *par exemple. Désignons par* a *le nombre formé par les* $k+1$ *premiers chiffres à gauche de la racine, suivis de* k *zéros, et par* b *le nombre formé par les* k *derniers chiffres de la racine.*

Divisons $N - a^2$ *par* $2a$, *soient* q *le quotient à une unité près par défaut, et* r *le reste.*

Démontrer que si $r \geqslant q^2$, *on a* $b = q$, *et que si* $r < q^2$, *on a* $b = q - 1$.

2° *Supposons maintenant que la racine carrée à une unité près du nombre* N *ait un nombre pair de chiffres,* $2k$ *par exemple.*

Si le premier chiffre à gauche de la racine est supérieur ou égal à 5, *on a le même théorème en prenant pour* a *le nombre formé par les* k *premiers chiffres de la racine, suivis de* k *zéros, et pour* b *le nombre formé par les* k *derniers chiffres.*

Si le premier chiffre de la racine est inférieur à 5, *il faut prendre pour* a *le nombre formé par les* $k+1$ *premiers chiffres, suivis de* $k-1$ *zéros, et pour* b *le nombre formé par les* $k-1$ *derniers chiffres.*

1° D'après la définition des nombres a et b, $a+b$ est la racine carrée de N à une unité près ; on a donc

$$(a+b)^2 \leqslant N < (a+b+1)^2,$$

ou $\quad a^2 + 2ab + b^2 \leqslant N < a^2 + 2a(b+1) + (b+1)^2,$

ou encore

$$(1) \qquad b + \frac{b^2}{2a} \leqslant \frac{N - a^2}{2a} < b + 1 + \frac{(b+1)^2}{2a}.$$

Il est facile de voir que $\frac{b^2}{2a}$ et $\frac{(b+1)^2}{2a}$ sont plus petits que 1. En effet, nous avons, par hypothèse,

$$b < 10^k, \qquad b + 1 \leqslant 10^k, \qquad a > 10^{2k}$$

et par suite

$$\frac{b^2}{2a} < \frac{10^{2k}}{2.10^{2k}} < 1, \qquad \frac{(b+1)^2}{2a} < \frac{10^{2k}}{2.10^{2k}} < 1.$$

Il résulte alors des inégalités (1) que q est égal à b ou à $b+1$, ce qui revient à dire que la racine de N est égale à $a+q$ ou à $a+q-1$.

Mais, on a $$N - a^2 = 2aq + r,$$

ou $$N - (a+q)^2 = r - q^2.$$

Donc, si $r \geqslant q^2$, on a $N \geqslant (a+q)^2$, la racine de N est $a+q$, on a $b = q$.

Si $r < q^2$, on a $N < (a+q)^2$, la racine de N est $a+q-1$ et l'on a $b = q - 1$.

Le théorème est démontré.

2° Nous avons toujours les inégalités (1), et nous allons montrer que $\frac{b^2}{2a}$ et $\frac{(b+1)^2}{2a}$ sont encore plus petits que 1.

Si le premier chiffre de a est égal ou supérieur à 5, on a

$$b < 10^k, \quad b + 1 \leqslant 10^k, \quad a \geqslant 5.10^{2k-1},$$

et $$\frac{b^2}{2a} < \frac{10^{2k}}{10.10^{2k-1}} < 1, \qquad \frac{(b+1)^2}{2a} \leqslant \frac{10^{2k}}{10.10^{2k-1}} \leqslant 1.$$

Si le premier chiffre de a est inférieur à 5, on a

$$b < 10^{k-1}, \quad b + 1 \leqslant 10^{k-1}, \quad a > 10^{2k-1}$$

et $$\frac{b^2}{2a} < \frac{10^{2k-2}}{2.10^{2k-1}} < 1, \qquad \frac{(b+1)^2}{2a} < \frac{10^{2k-2}}{2.10^{2k-1}} < 1.$$

La démonstration s'achève comme plus haut.

43. Conséquence. — Pour obtenir la racine carrée d'un nombre entier N à une unité près par la méthode abrégée, on calcule d'abord les chiffres de a par le procédé ordinaire, puis on calcule les autres chiffres qui constituent le nombre b en faisant le quotient de $N - a^2$ par $2a$.

Voici quelques exemples :

44. *Calculer $\sqrt{e}$ à $\frac{1}{10^6}$ près.*

On a $$e = 2,7182818284590452...$$

En multipliant par 10^{12} et en prenant seulement la partie entière on obtient le nombre entier

$$N = 2718281828459,$$

dont il faut extraire la racine carrée à une unité près.

Si nous décomposons le nombre en tranches de deux chiffres à partir de la droite, nous obtenons sept tranches, donc la racine a sept chiffres.

Nous calculons les quatre premiers par la méthode ordinaire, et nous avons l'opération suivante :

2.71.82.81.82.84.59	1648
171	26 × 6
1582	324 × 4
28681	3288 × 8
2377	

Les quatre premiers chiffres sont 1648, et comme il reste trois chiffres à trouver, nous avons :

$$a = 1648000;$$

d'autre part, le reste 2377 est égal à

$$2718281 - \overline{1648}^2;$$

donc la différence $N - a^2$ s'obtient en plaçant à la suite de 2377 les chiffres du nombre N qui n'ont pas été utilisés dans cette opération.

On a donc $\qquad N - a^2 = 2377828459.$

Nous divisons maintenant ce nombre par $2a$ ou 3296000 :

$$\begin{array}{r|l} 2377828459 & 3296000 \\ \cline{2-2} 7062845 & 721 \\ 4708459 & \\ 1412459 & \end{array}$$

Le quotient est $q = 721$, et le reste

$$r = 1412459.$$

On a visiblement $r > q^2$, donc $b = 721$, et la racine de N à une unité près est 1648721, par suite la racine de e à $\frac{1}{10^6}$ près par défaut est 1,648721.

45. *Calculer à une unité près la racine carrée du nombre* 1432925248.

La racine a cinq chiffres ; les trois premiers sont 378. On a

$$a = 37800, \qquad N - a^2 = 4085248.$$

En divisant $N - a^2$ par $2a$ on a pour quotient 54 et pour reste 2848.

Or $2848 < 54^2$, donc $b = 54 - 1 = 53$, et la racine cherchée est 37853.

46. *Calculer la racine carrée de* 41 *à* $\frac{1}{10^9}$ *près.*

La racine a dix chiffres, et comme le premier est 6, on calcu-

era les cinq premiers par la méthode ordinaire ; on trouve 64031.

Les cinq derniers sont donnés par la division de $N - a^2$ par $2a$.

On a

$$N - a^2 = 31039 \times 10^{10}, \qquad 2a = 128062 \times 10^5 ;$$

le quotient est 24237 et le reste 61306×10^5.

On en conclut que la racine est

$$6,403124237.$$

47. *Calculer la racine carrée de* π *à* $\frac{1}{10^9}$ *près.*

La racine a dix chiffres, mais comme le premier est 1, on cal culera les six premiers par le procédé ordinaire, et les quatre suivants par une division.

On trouve 1,772453850.

48. *Vérifier les résultats suivants :*

$$\sqrt{6} = 2,44948974278...,$$
$$\sqrt{7} = 2,64575131106...,$$
$$\sqrt{10} = 3,16227766016...,$$
$$\sqrt{50} = 7,07106781186...,$$
$$\sqrt{723} = 26,88865931949 8...,$$
$$\sqrt{2141} = 46,270941205037...$$

49. *Sur la tangente en un point* A *d'un cercle de centre* O *on prend dans le même sens les longueurs* AB, BC *respectivement égales aux* $\frac{11}{5}$ *et aux* $\frac{2}{5}$ *du rayon ; puis on prend à partir de* A, *sur le rayon* AO *et du côté du centre,* $AD = OB$; *enfin, on mène par* D *la parallèle* DF *à* OC, *qui rencontre la tangente en* A *au point* F.

Montrer que la longueur AF *est une valeur approchée par défaut de la longueur de la circonférence, l'erreur étant plus petite que le millionième du diamètre.*

On trouve aisément

$$AF = 2R.\frac{26\sqrt{146}}{100} = 2R.3{,}14159195...$$

CHAPITRE II

APPROXIMATIONS NUMÉRIQUES MÉTHODE DE GUYOU (*)

Nous nous proposons de résoudre le problème suivant :

50. *Soient a, b, c,... des nombres commensurables ou incommensurables, connus avec autant d'approximation que l'on veut, et soit*

$$x = f(a, b, c, \ldots)$$

le résultat d'une ou de plusieurs opérations arithmétiques (addition, soustraction, multiplication, division, extraction de racine carrée) effectuées sur les nombres a, b, c,...

On demande de calculer le nombre x avec une approximation donnée à l'avance, par défaut ou par excès, par exemple, à $\pm \frac{n}{10^\alpha}$ près, n désignant un nombre compris entre 1 et 10, pas nécessairement entier, et α un nombre entier, positif, négatif ou nul.

Pour calculer le nombre x, nous remplaçons d'abord a, b, c,... par des valeurs approchées plus simples, $a + \Delta a$, $b + \Delta b$, $c + \Delta c$,... et nous calculons le nombre

$$x_1 = x + \Delta x = f(a + \Delta a,\ b + \Delta b,\ c + \Delta c, \ldots),$$

qui est une valeur approchée de x, l'erreur commise étant $x_1 - x$ ou Δx.

(*) *Nouvelles annales de mathématiques*, 1889, p. 165.

On peut écrire

$$\Delta x = f(a + \Delta a,\ b + \Delta b,\ c + \Delta c, \ldots) - f(a, b, c, \ldots),$$

ou, en appliquant la formule des accroissements finis, étendue aux fonctions de plusieurs variables,

$$\begin{aligned}\Delta x = &\ \Delta a f'_a(a + \theta\Delta a,\ b + \theta\Delta b,\ c + \theta\Delta c, \ldots)\\ &+ \Delta b f'_b(a + \theta\Delta a,\ b + \theta\Delta b,\ c + \theta\Delta c, \ldots)\\ &+ \Delta c f'_c(a + \theta\Delta a,\ b + \theta\Delta b,\ c + \theta\Delta c, \ldots)\\ &+ \ldots,\end{aligned}$$

θ étant compris entre 0 et 1, ou plus simplement

$$(1)\quad \Delta x = \Delta a f'_a(a', b', c', \ldots) + \Delta b f'_b(a', b', c', \ldots) + \Delta c f'_c(a', b', c', \ldots) + \ldots,$$

a' étant compris entre a et $a + \Delta a$, b' entre b et $b + \Delta b$, etc. (*)

(*) Pour les lecteurs qui ne connaissent pas la formule des accroissements finis, on peut établir directement l'égalité (1) dans les trois cas particuliers suivants :

$$f(a, b) = ab, \qquad f(a, b) = \frac{a}{b}, \qquad f(a) = \sqrt{a}.$$

Ce seront d'ailleurs les seuls cas qui seront envisagés dans les applications.

1° $f(a, b) = ab$. Nous avons $f'_a = b$, $f'_b = a$; la formule à établir est donc

$$(\alpha)\qquad \Delta x = b'\Delta a + a'\Delta b.$$

Or, on a

$$\Delta x = (a + \Delta a)(b + \Delta b) - ab = b\Delta a + a\Delta b + \Delta a\Delta b,$$

ou

$$\Delta x = \left(b + \frac{1}{2}\Delta b\right)\Delta a + \left(a + \frac{1}{2}\Delta a\right)\Delta b,$$

et, en posant $a + \frac{1}{2}\Delta a = a'$, $b + \frac{1}{2}\Delta b = b'$, on obtient la formule (α).

2° $f(a, b) = \frac{a}{b}$. On a $f'_a = \frac{1}{b}$, $f'_b = -\frac{a}{b^2}$, et il faut démontrer l'égalité

$$(\beta)\qquad \Delta x = \frac{1}{b'}\Delta a - \frac{a'}{b'^2}\Delta b.$$

Nous avons

$$\Delta x = \frac{a + \Delta a}{b + \Delta b} - \frac{a}{b} = \frac{b\Delta a - a\Delta b}{b(b + \Delta b)}.$$

On peut supposer que Δb est assez petit pour que b et $b + \Delta b$ soient de même signe ; alors la moyenne géométrique des deux nombres b et $b + \Delta b$ est un nombre compris entre b et $b + \Delta b$, qu'on peut représenter par $b + \theta\Delta b$, $(0 < \theta < 1)$. On a $b(b + \Delta b) = (b + \theta\Delta b)^2$, et

$$\Delta x = \frac{(b + \theta\Delta b)\Delta a - (a + \theta\Delta a)\Delta b}{(b + \theta\Delta b)^2}.$$

Posons $a + \theta\Delta a = a'$, $b + \theta\Delta b = b'$, nous obtenons la formule (β).

Telle est l'expression de l'erreur commise en prenant x_1 pour valeur de x.

51. D'autre part, en calculant x_1, on est conduit en général à un nombre incommensurable ou à un nombre commensurable dont il est inutile de conserver toutes les décimales.

Si l'on conserve seulement les α premières décimales du nombre x_1, en augmentant la α^e d'une unité dans le cas où la $(\alpha+1)^e$ est supérieure ou égale à 5, on obtient un nombre x_2 qui diffère de x_1, en plus ou en moins, d'une quantité inférieure à $\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{10^\alpha}$ (*).

On a donc $$|x_1 - x_2| < \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{10^\alpha}.$$

Mais on peut écrire

$$x - x_2 = (x - x_1) + (x_1 - x_2),$$

et $$|x - x_2| \leqslant |x - x_1| + |x_1 - x_2|,$$

ou $$|x - x_2| < |\Delta x| + \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{10^\alpha}.$$

3° $f(a) = \sqrt{a}$. On a $f'_a = \frac{1}{2\sqrt{a}}$, et tout revient à montrer que

$$(\gamma) \qquad \Delta x = \frac{\Delta a}{2\sqrt{a'}}.$$

Or $$\Delta x = \sqrt{a+\Delta a} - \sqrt{a} = \frac{\Delta a}{\sqrt{a+\Delta a}+\sqrt{a}}.$$

La moyenne arithmétique m des nombres $\sqrt{a}$ et $\sqrt{a+\Delta a}$ étant comprise entre ces deux nombres, le carré de m est compris entre a et $a+\Delta a$; on peut donc écrire $m = \sqrt{a'}$, a' étant compris entre a et $a+\Delta a$, et par suite

$$\Delta x = \frac{\Delta a}{2\sqrt{a'}}.$$

(*) Supposons par exemple qu'on ait $x_1 = 4{,}872659$. Gardons seulement les deux premières décimales, en n'augmentant pas la deuxième, puisque la troisième est égale à 2 ; nous aurons $x_2 = 4{,}87$, et

$$x_1 - x_2 = 0{,}002659 < 0{,}005 < \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{10^2}.$$

Prenons maintenant les trois premières décimales, en augmentant la troisième d'une unité, puisque la quatrième est 6 ; nous aurons $x_2 = 4{,}873$, et

$$x_2 - x_1 = 0{,}000341 < 0{,}0005 < \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{10^3}.$$

Déterminons alors Δa, Δb, Δc,... de manière que l'on ait

$$|\Delta x| < \left(n - \frac{1}{2}\right)\frac{1}{10^\alpha},$$

on aura
$$|x - x_2| < \left(n - \frac{1}{2}\right)\frac{1}{10^\alpha} + \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{10^\alpha},$$

ou
$$|x - x_2| < \frac{n}{10^\alpha},$$

et ceci montre que x_2 sera une valeur approchée de x, à

$$\pm\frac{n}{10^\alpha} \text{ près.}$$

52. On en conclut la méthode suivante pour calculer x à moins de $\frac{n}{10^\alpha}$ par excès ou par défaut.

1° On cherche à déterminer Δa, Δb, Δc,... de façon que l'on ait

$$|\Delta x| < \left(n - \frac{1}{2}\right)\frac{1}{10^\alpha},$$

ou, en remplaçant Δx par sa valeur (1),

$$|\Delta a f'_a(a', b', c', \ldots) + \Delta b f'_b(\ldots) + \Delta c f'_c(\ldots) + \ldots| < \left(n - \frac{1}{2}\right)\frac{1}{10^\alpha}.$$

Cette inégalité sera résolue si l'on a

$$|\Delta a f'_a(a', b', c', \ldots)| < \frac{n - \frac{1}{2}}{p}\cdot\frac{1}{10^\alpha},$$

(2)
$$|\Delta b f'_b(a', b', c', \ldots)| < \frac{n - \frac{1}{2}}{p}\cdot\frac{1}{10^\alpha},$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots ,$$

p désignant le nombre des quantités a, b, c,...

Nous ne connaissons pas a', b', c', ... ; nous savons seulement que a' est compris entre a et $a + \Delta a$, b' entre b et $b + \Delta b$, etc.

Néanmoins, il est facile de résoudre rapidement et à vue les inégalités (2) par rapport à Δa, Δb, Δc,...

Pour cela, nous choisissons deux nombres a_1, a_2 ($a_1 < a_2$) assez écartés pour être certain qu'ils comprennent a et $a + \Delta a$, puis deux nombres b_1, b_2 ($b_1 < b_2$) comprenant b et $b + \Delta b$,... et nous remplaçons a' soit par a_1, soit par a_2, b' soit par b_1, soit par b_2,..., de manière à *forcer* les quantités

$$|f'_a(a', b', c',\ldots)|, \quad |f'_b(a', b', c',\ldots)|, \ldots$$

Nous pouvons alors résoudre les inégalités (2) par rapport à $|\Delta a|$, $|\Delta b|$, $\Delta|c|$,...

Ayant ainsi déterminé Δa, on pourra vérifier que a et $a + \Delta a$ sont compris entre a_1 et a_2. Si cela n'avait pas lieu, il faudrait recommencer le calcul en prenant pour a_1 et a_2 des limites plus écartées.

Tout ceci s'éclaircira par les exemples qui vont suivre.

2° Il existe alors une infinité de valeurs de Δa, Δb, Δc,... vérifiant les inégalités (2). On choisira celles pour lesquelles les nombres $a + \Delta a$, $b + \Delta b$, $c + \Delta c$,... ont le plus petit nombre de décimales.

Par exemple, supposons qu'on ait

$$a = 4,5628975,$$

et que la première inégalité ait donné

$$|\Delta a| < 0,003.$$

Nous prendrons

$$a + \Delta a = 4,56,$$

cela revient à supposer

$$\Delta a = -0,002875,$$

et cette quantité est bien moindre que 0,003 en valeur absolue.

Conservons la même valeur de a, et supposons qu'on ait trouvé

$$|\Delta a| < 0,0002;$$

nous choisirons

$$a + \Delta a = 4{,}563,$$

cela revient à prendre

$$\Delta a = + 0{,}0001025.$$

3° Ayant choisi les nombres $a + \Delta a$, $b + \Delta b$, $c + \Delta c, \ldots$ nous calculerons le nombre x_1, défini par l'égalité

$$x_1 = f(a + \Delta a, \quad b + \Delta b, \quad c + \Delta c, \ldots);$$

nous conserverons seulement les α premières décimales du résultat obtenu, en augmentant la α^e d'une unité si la $(\alpha + 1)^e$ décimale est supérieure ou égale à 5.

Nous aurons ainsi un nombre x_2, qui sera une valeur approchée de x, à moins de $\frac{n}{10^\alpha}$, par excès ou par défaut.

Nous allons appliquer cette méthode à différents exemples.

Nous considérerons d'abord des *formules simples,* c'est-à-dire des formules dont la valeur peut s'obtenir par une seule opération arithmétique ; ainsi les formules ab, $\frac{a}{b}$, $\sqrt{a}$ sont des formules simples.

Mais a^3 par exemple n'est pas une formule simple, car le résultat ne peut être obtenu que par deux multiplications.

Nous étudierons ensuite les *formules complexes,* c'est-à-dire des formules dont la valeur ne peut être obtenue que par une série d'opérations arithmétiques successives dont la dernière a pour résultat le nombre demandé.

Formules simples.

53. *Calculer à* $\pm 0{,}0036$ *près la valeur du produit*

$$67{,}257736 \times 4{,}593719.$$

Posons $\quad a = 67{,}257736, \qquad b = 4{,}593719,$

et

$$x = ab.$$

On peut remarquer que 0,0036 peut s'écrire $\frac{3,6}{10^3}$; c'est bien de la forme $\frac{n}{10^\alpha}$, où $n = 3,6$, $\alpha = 3$.

En appliquant la formule (1) du n° 50, on a

$$\Delta x = b'\Delta a + a'\Delta b,$$

et conformément à la méthode indiquée (52), il faut déterminer Δa et Δb de façon que l'on ait

$$|b'\Delta a + a'\Delta b| < \frac{3,6}{10^3} - \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{10^3},$$

ou

$$|b'\Delta a + a'\Delta b| < 0,0031.$$

Pour cela, nous résolvons les inégalités

$$|b'\Delta a| < \frac{0,0031}{2}, \qquad |a'\Delta b| < \frac{0,0031}{2}.$$

Il faut forcer les premiers membres et on peut diminuer les seconds pour les simplifier.

Remplaçons b' et a' par les valeurs par excès 5 et 68, nous obtenons

$$5|\Delta a| < 0,00155, \qquad 68|\Delta b| < 0,00155,$$

ou

$$|\Delta a| < \frac{0,00155}{5}, \qquad |\Delta b| < \frac{0,00155}{68},$$

ou enfin

$$|\Delta a| < 0,0003, \qquad |\Delta b| < 0,00002.$$

Nous prendrons alors, pour valeurs approchées de a et de b,

$$a + \Delta a = 67,258,$$
$$b + \Delta b = 4,5937,$$

ce qui revient à supposer

$$\Delta a = 0,000264, \qquad \Delta b = -0,000019,$$

et ces nombres vérifient bien les inégalités précédentes.

Calculons maintenant le nombre x_1 défini par l'égalité

$$x_1 = (a + \Delta a)(b + \Delta b) = 67,258 \times 4,5937\ ;$$

nous obtenons

$$x_1 = 308,9630746\,;$$

nous conservons seulement les trois premières décimales, et nous avons

$$x_2 = 308,963,$$

qui est une valeur de x approchée à moins de $0,0036$ par excès ou par défaut.

54. *Calculer à* $\pm 0,0457$ *près le quotient*

$$x = \frac{a}{\pi},$$

en posant $a = 3,5984327.$

Nous avons ici

$$\Delta x = \frac{1}{\pi'}\,\Delta a - \frac{a'}{\pi'^2}\,\Delta\pi,$$

et nous avons à résoudre l'inégalité

$$|\Delta x| < 0,0457 - \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{10^2},$$

ou

$$\left|\frac{1}{\pi'}\,\Delta a - \frac{a'}{\pi'^2}\,\Delta\pi\right| < 0,0407.$$

Pour cela, nous considérons les deux inégalités

$$\left|\frac{1}{\pi'}\,\Delta a\right| < \frac{0,0407}{2}, \qquad \left|\frac{a'}{\pi'^2}\,\Delta\pi\right| < \frac{0,0407}{2}\,;$$

nous forçons les premiers membres en remplaçant π' par la valeur par défaut 3 et a' par la valeur par excès 4.

Ceci nous donne

$$\frac{1}{3}\,|\Delta a| < \frac{0,0407}{2}, \qquad \frac{4}{9}\,|\Delta\pi| < \frac{0,0407}{2},$$

ou

$$|\Delta a| < 0,06, \qquad |\Delta\pi| < 0,04.$$

Nous pouvons prendre alors

$$a + \Delta a = 3,6, \qquad \pi + \Delta\pi = 3,14,$$

et nous calculons le quotient

$$x_1 = \frac{a + \Delta a}{\pi + \Delta \pi} = \frac{3,6}{3,14},$$

en prenant seulement trois décimales. Nous obtenons 1,146 ; comme la troisième est supérieure à 5, nous augmentons la deuxième d'une unité et nous avons la valeur cherchée

$$x_2 = 1,15.$$

55. *Calculer à moins de* 0,007 *par excès ou par défaut la racine carrée du nombre*

$$a = 10,572895.$$

Posons $$x = \sqrt{a},$$

nous avons $$\Delta x = \frac{1}{2\sqrt{a'}} \Delta a,$$

et il nous faut résoudre l'inégalité

$$\frac{|\Delta a|}{2\sqrt{a'}} < 0,007 - \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{10^3}.$$

Remplaçons a' par la valeur par défaut 9, nous avons

$$\frac{|\Delta a|}{6} < 0,0065,$$

ou $$|\Delta a| < 0,039.$$

Nous prenons alors

$$a + \Delta a = 10,57,$$

nous calculons

$$x_1 = \sqrt{10,57},$$

avec quatre décimales, ce qui donne 3,2511, et nous supprimons la dernière.

La valeur cherchée est 3,251

Formules complexes.

56. La méthode, indiquée par Guyou, consiste à substituer à toute formule complexe une succession de formules simples.

Soit, par exemple, à calculer

$$x = \sqrt{\frac{ab}{c}},$$

à $\pm \frac{n}{10^\alpha}$ près.

Nous calculons d'abord le produit

$$p = ab,$$

puis le quotient $$q = \frac{p}{c},$$

et enfin la racine carrée $$x = \sqrt{q};$$

nous avons ainsi trois formules simples.

Seulement il importe de déterminer avec quelle approximation il faut calculer successivement a, b, p, c, q, pour obtenir x avec l'approximation demandée.

Pour avoir x à moins de $\frac{n}{10^\alpha}$ près, nous partons de l'égalité

$$\Delta x = \frac{\Delta q}{2\sqrt{q'}},$$

et nous déterminons Δq de façon que l'on ait

$$\left|\frac{\Delta q}{2\sqrt{q'}}\right| < \frac{n - \frac{1}{2}}{10^\alpha}.$$

Nous remplaçons q' par une valeur approchée par défaut, afin de forcer le premier membre ; nous pouvons diminuer le second membre pour simplifier, et nous obtenons une condition de la forme

$$|\Delta q| < \frac{n_1}{10^{\alpha_1}}, \qquad (1 < n_1 < 10).$$

Ceci nous montre qu'on doit calculer q à $\pm \frac{n_1}{10^{\alpha_1}}$ près.

Pour cela nous avons la formule

$$\Delta q = \frac{\Delta p}{c'} - \frac{p'}{c'^2}\Delta c,$$

et nous déterminons Δp et Δc de façon que

$$\left|\frac{\Delta p}{c'} - \frac{p'}{c'^2}\Delta c\right| < \frac{n_1 - \frac{1}{2}}{10^{\alpha_1}},$$

ou
$$\left|\frac{\Delta p}{c'}\right| < \frac{n_1 - \frac{1}{2}}{2 \,.\, 10^{\alpha_1}}, \qquad \left|\frac{p'}{c'^2}\Delta c\right| < \frac{n_1 - \frac{1}{2}}{2 \,.\, 10^{\alpha_1}}.$$

Nous y remplaçons c' par une valeur approchée par défaut et p' par une valeur approchée par excès, et nous déduisons de là des inégalités de la forme

$$|\Delta p| < \frac{n_2}{10^{\alpha_2}}, \qquad |\Delta c| < \frac{n_3}{10^{\alpha_3}},$$

ce qui nous indique les approximations avec lesquelles on doit calculer p et c.

Nous avons enfin $\Delta p = b'\Delta a + a'\Delta b$,

et pour calculer p à moins de $\frac{n_2}{10^{\alpha_2}}$, nous devons prendre Δa et Δb vérifiant l'inégalité

$$|b'\Delta a + a'\Delta b| < \frac{n_2 - \frac{1}{2}}{10^{\alpha_2}},$$

ou
$$|b'\Delta a| < \frac{n_2 - \frac{1}{2}}{2 \,.\, 10^{\alpha_2}}, \qquad |a'\Delta b| < \frac{n_2 - \frac{1}{2}}{2 \,.\, 10^{\alpha_2}}.$$

Nous substituons à b' et a' des valeurs approchées par excès, et nous obtenons les conditions

$$|\Delta a| < \frac{n_4}{10^{\alpha_4}}, \qquad |\Delta b| < \frac{n_5}{10^{\alpha_5}}.$$

Cela posé, nous calculons le produit $(a+\Delta a)(b+\Delta b)$, Δa, Δb vérifiant ces dernières inégalités, et comme ce produit doit être obtenu à moins de $\frac{n_2}{10^{\alpha_2}}$, nous conservons seulement les α_2 premières décimales, augmentant la dernière d'une unité, si la $(\alpha_2+1)^e$ est égale ou supérieure à 5.

Nous avons ainsi la valeur approchée de p. Nous la divisons par la valeur approchée de c à moins de $\frac{n_3}{10^{\alpha_3}}$; nous conservons seulement les α_1 premières décimales du quotient, augmentant la dernière d'une unité si la $(\alpha_1+1)^e$ est égale ou supérieure à 5, puisque q doit être calculé à $\pm\frac{n_1}{10^{\alpha_1}}$ près.

Il ne reste plus enfin qu'à calculer la racine carrée de la valeur approchée de q à $\pm\frac{n}{10^{\alpha}}$ près.

Tous ces calculs doivent être faits avec beaucoup d'ordre. M. Guyou propose la règle très simple et très pratique, énoncée ci-après, que nous allons appliquer à l'exemple suivant.

57. *Calculer à* $\pm 0{,}0037$ *près le nombre x défini par la formule*

$$x=\sqrt{\frac{0{,}278592\times 3{,}654786}{11{,}74826}}.$$

La règle se divise en six parties :

1° *Remplacer par des lettres dans l'expression donnée les nombres auxquels on substituera des valeurs approchées plus simples.*

Nous écrirons ici $$x=\sqrt{\frac{ab}{c}}.$$

2° *Préparer un tableau en quatre colonnes ayant respectivement pour titres :*

I. — *Opérations à effectuer.*

II. — *Résultats approchés par excès ou par défaut.*

III. — *Approximations nécessaires.*

IV. — *Résultats définitifs.*

Ce tableau se trouve à la fin de l'énoncé de la règle.

3° *Indiquer dans la colonne* I *les opérations à effectuer successivement, en désignant par de nouvelles lettres les résultats de ces opérations, et en ayant soin, lorsque, dans une de ces opérations, on aura à utiliser un des nombres qui ont été désignés au début par des lettres, de placer la lettre qui désigne ce nombre avant l'opération elle-même.*

Ainsi, dans l'exemple considéré, la première opération à effectuer est le produit ab : on le désigne par p et on inscrit avant p les lettres a et b qui figurent dans ce produit ; on aura ensuite à calculer le quotient $q = \frac{p}{c}$; ayant à utiliser le nombre c dans cette opération, on inscrira cette lettre avant l'opération. On indiquera enfin la dernière opération à effectuer $x = \sqrt{q}$; de cette manière, tous les nombres dont il y aura lieu de déterminer l'approximation sont inscrits dans la colonne I, et dans l'ordre même dans lequel on aura à les employer.

4° *Dans la colonne* II, *on inscrira des valeurs grossièrement approchées par défaut et par excès des nombres mentionnés dans la colonne* I.

Devant a nous mettrons 0,2 et 0,3 ; devant b, 3 et 4 ; devant p, $0,2 \times 3 = 0,6$ et $0,3 \times 4 = 1,2$; devant c, 11 et 12 ; pour avoir une valeur de $\frac{p}{c}$ par défaut, nous prendrons p par défaut, c par excès, ce qui donne $\frac{0,6}{12}$ ou 0,05, et comme valeur par excès nous aurons $\frac{1,2}{11}$, qui est inférieure à 0,11.

5° *Inscrire sur la dernière ligne de la colonne* III, *en regard de x, l'approximation demandée ; déterminer ensuite comme nous l'avons dit plus haut l'approximation nécessaire aux éléments de la dernière opération, l'inscrire en regard de ces*

éléments, et continuer en remontant jusqu'à ce que la colonne soit remplie.

Nous écrirons en regard de x l'approximation demandée 0,0037. Nous avons ensuite

$$|\Delta x| = \left|\frac{\Delta q}{2\sqrt{q'}}\right| < 0{,}0037 - \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{10^3};$$

nous remplaçons $\sqrt{q'}$ par la valeur approchée par défaut 0,2 inscrite dans la colonne II, et nous avons

$$\frac{|\Delta q|}{0{,}4} < 0{,}0032, \qquad \text{ou} \qquad |\Delta q| < 0{,}00128;$$

nous plaçons 0,00128 dans la colonne III devant la lettre q.

Nous en déduisons

$$|\Delta q| = \left|\frac{1}{c'}\Delta p - \frac{p'}{c'^2}\Delta c\right| < 0{,}00128 - \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{10^3} = 0{,}00078,$$

$$\left|\frac{1}{c'}\Delta p\right| < \frac{0{,}00078}{2}, \qquad \left|\frac{p'}{c'^2}\Delta c\right| < \frac{0{,}00078}{2}.$$

Remplaçons c' par sa valeur approchée par défaut, 11, inscrite dans la colonne II, et p' par sa valeur par excès 1,2, nous obtenons

$$|\Delta p| < 0{,}00429, \qquad |\Delta c| < 0{,}039,$$

et dans la colonne III nous plaçons 0,00429 en face de p et 0,039 en face de c.

Enfin, nous avons

$$|\Delta p| = |b'\Delta a + a'\Delta b| < 0{,}00429 - \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{10^3} = 0{,}00379,$$

$$|b'\Delta a| < \frac{0{,}00379}{2}, \qquad |a'\Delta b| < \frac{0{,}00379}{2};$$

nous remplaçons b' et a' par les valeurs approchées par excès 4 et 0,3, et nous obtenons

$$|\Delta a| < 0{,}00047, \qquad |\Delta b| < 0{,}0063,$$

puis nous plaçons dans la colonne III 0,00047 devant a et 0,0063 devant b.

6° *On écrira immédiatement, dans la colonne* IV, *les valeurs des nombres qui ont été désignés au début par des lettres, avec l'approximation indiquée en regard, et l'on effectuera les opérations indiquées dans la colonne* I *en poussant les calculs jusqu'aux unités de l'ordre du premier chiffre significatif à gauche de l'approximation inscrite dans la colonne* III, *et en forçant ou en conservant le dernier chiffre, suivant que le premier chiffre supprimé est supérieur ou égal à* 5, *ou qu'il est plus petit que* 5.

Ainsi, devant a nous plaçons 0,279, car la différence 0,279 — a est égale à 0,000408, et est plus petite que 0,00047.

Devant b nous plaçons 3,65, car

$$b - 3{,}65 = 0{,}004786 < 0{,}0063.$$

Nous faisons le produit

$$0{,}279 \times 3{,}65 = 1{,}01835,$$

nous gardons seulement les trois premières décimales, et nous plaçons 1,018 dans la colonne IV, en regard de q.

Devant c nous écrivons 11,74, puis nous divisons 1,018 par 11,74, en calculant seulement les quatre premières décimales ; nous trouvons 0,0867. Comme la dernière est supérieure à 5, nous forçons la troisième décimale d'une unité, et nous inscrivons 0,087 en regard de q dans la colonne IV.

Il n'y a plus enfin qu'à extraire la racine carrée de 0,087 avec quatre décimales. Nous obtenons 0,2949, nous supprimons le dernier 9 et nous augmentons le 4 d'une unité.

La valeur cherchée de x est alors 0,295 ; elle se place en regard de x dans la colonne IV.

Nous avons ainsi le tableau suivant :

I OPÉRATIONS à EFFECTUER	II RÉSULTATS APPROCHÉS par défaut.	par excès.	III APPROXIMATIONS NÉCESSAIRES	IV RÉSULTATS DÉFINITIFS
a	0,2	0,3	0,00047	0,279
b	3	4	0,0063	3,65
$p = ab$	0,6	1,2	0,00429	1,018
c	11	12	0,039	11,74
$q = \frac{p}{c}$	0,05	0,11	0,00128	0,087
$x = \sqrt{q}$	0,2	0,4	0,0037	0,295

58. *Calculer à* $\frac{1}{1\,000}$ *près par défaut ou par excès le nombre*

$$x = \sqrt{1 - \frac{3\sqrt{3}}{4\pi}}.$$

(*École Navale*, 1893.)

Nous formerons le tableau suivant :

I OPÉRATIONS à EFFECTUER	II RÉSULTATS APPROCHÉS par défaut.	par excès.	III APPROXIMATIONS NÉCESSAIRES	IV RÉSULTATS DÉFINITIFS
$\alpha = \sqrt{3}$	1	2	0,0008	1,732
$A = 3\alpha$	3	6	0,003	5,196
π	3	4	0,001	3,141
$B = 4\pi$	12	16	0,006	12,564
$R = \frac{A}{B}$	0,18	0,5	0,0006	0,4136
$s = 1 - R$	0,5	0,82	0,0007	0,5864
$x = \sqrt{s}$	0,7	1	0,001	0,766

Voici le détail du calcul des approximations :

$$|\Delta x| = \left|\frac{\Delta s}{2\sqrt{s'}}\right| < 0{,}001 - 0{,}0005,$$

$$\left|\frac{\Delta s}{1{,}4}\right| < 0{,}0005, \qquad |\Delta s| < 0{,}0007.$$

$$\Delta s = -\Delta R, \qquad |\Delta R| < 0{,}0007 - \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{10^4} < 0{,}0006,$$

$$|\Delta R| = \left|\frac{1}{B'}\Delta A - \frac{A'}{B'^2}\Delta B\right| < 0{,}0006 - \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{10^4} = 0{,}00055,$$

$$\left|\frac{\Delta A}{B'}\right| < \frac{0{,}0005}{2}, \qquad \left|\frac{A'}{B'^2}\Delta B\right| < \frac{0{,}0005}{2},$$

$$\frac{|\Delta A|}{12} < \frac{0{,}0005}{2}, \qquad \frac{6\,|\Delta B|}{144} < \frac{0{,}0005}{2},$$

$$|\Delta A| < 0{,}003, \qquad |\Delta B| < 0{,}006,$$

$$|\Delta B| = |4\Delta\pi| < 0{,}006 - \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{10^3}, \qquad |\Delta\pi| < 0{,}001.$$

$$|\Delta A| = |3\Delta\alpha| < 0{,}003 - \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{10^3}, \qquad |\Delta\alpha| < 0{,}0008.$$

La valeur cherchée est 0,766.

59. *Calculer à* $\frac{1}{100}$ *de seconde près la durée de l'oscillation d'un pendule de* 300$^{\text{m}}$ *avec*

$$g = 9{,}8094 \qquad (\textit{unités : mètre et seconde}).$$

(*École Navale*, 1900.)

On a la formule

$$t = \pi\sqrt{\frac{l}{g}} = \pi\sqrt{\frac{300}{g}}.$$

On formera aisément le tableau suivant, en remarquant que de la formule $a = \frac{300}{g}$, on tire $\Delta a = -\frac{300\Delta g}{g'^2}$.

I OPÉRATIONS à EFFECTUER	II RÉSULTATS APPROCHÉS par défaut.	par excès.	III APPROXIMATIONS NÉCESSAIRES	IV RÉSULTATS DÉFINITIFS
g	9	10	0,0013	9,81
$a = \frac{300}{g}$	30	34	0,0055	30,581
$b = \sqrt{a}$	5	6	0,0006	5,530
π	3	4	0,0004	3,1416
$t = \pi b$	15	24	0,01	17,37

La valeur cherchée est 17,37.

60. *Calculer à $\frac{1}{1000}$ près les racines de l'équation*

$$x^4 + \pi x^2 - 7,6 = 0.$$

(*École Navale*, 1895.)

Cette équation a deux racines réelles opposées ; nous calculerons la positive qui a pour valeur

$$x = \sqrt{-\frac{\pi}{2} + \sqrt{\frac{\pi^2}{4} + 7,6}},$$

et nous écrirons

$$x = \sqrt{-a + \sqrt{b^2 + 7,6}},$$

en posant $a = b = \frac{\pi}{2}$.

Nous représentons $\frac{\pi}{2}$ par deux lettres distinctes, parce que $\frac{\pi}{2}$ figure dans la formule à deux places différentes, et que dans ces deux positions l'approximation n'est pas forcément la même.

I OPÉRATIONS à EFFECTUER	II RÉSULTATS APPROCHÉS par défaut.	par excès.	III APPROXIMATIONS NÉCESSAIRES	IV RÉSULTATS DÉFINITIFS
$b = \frac{\pi}{2}$	1,5	1,6	0,00015	1,5708
$c = b^2 + 7,6$	9	11	0,001	10,067
$d = \sqrt{c}$	3	3,5	0,00025	3,173
$a = \frac{\pi}{2}$	1,5	1,6	0,00025	1,571
$f = d - a$	1,4	2	0,001	1,602
$x = \sqrt{f}$	1,1	1,5	0,001	1,266

La racine positive de l'équation est, à $\frac{1}{1\,000}$ près, 1,266.

61. *Calculer à* $\frac{1}{100}$ *près le cosinus de l'angle* B *d'un triangle* ABC *rectangle en* A, *dont les côtés* b *et* c *ont pour longueurs*

$$b = 115,6543, \qquad c = 17,4326.$$

(*École Navale,* 1889.)

On trouve $\cos B = 0,15$.

62. *Calculer à* $\frac{1}{1\,000}$ *près la tangente de* 18°, *en remarquant que le sinus de cet arc est la moitié du côté du décagone régulier inscrit.*

(*École Navale,* 1892.)

Réponse : $\operatorname{tg} 18° = 0,325$.

63. *Calculer* $\frac{\pi^2}{\sqrt{3}}$ *à* 0,0001 *près.*

(*École Navale,* 1905.)

On trouve 5,6982.

64. *Calculer* $\pi^3\sqrt{3}$ *à* $\frac{1}{100}$ *près.*

On trouve $53{,}70.$

65. *Calculer à* $\frac{1}{100}$ *près*

$$x = \frac{14{,}178923 \,.\, \sqrt{83{,}015}}{3{,}21789}.$$

On trouve $x = 40{,}15.$

66. *Calculer à* $\pm 0{,}02$ *près*

$$x = \frac{(0{,}11702\pi + 1{,}43115)^2}{\sqrt{2\sqrt{3} + 5{,}01264}}. \ (^*)$$

On trouve $x = 1{,}11.$

67. *Calculer à* $\frac{1}{1000}$ *près*

$$\frac{\sqrt{7} - 2}{\sqrt{3} + 1}.$$

(*École des Mines de Saint-Étienne,* 1908.)

On trouve $0{,}236.$

68. *Calculer à* $\frac{1}{100}$ *près par défaut les valeurs absolues* α *et* β *des racines de l'équation*

$$x^4 - 2\sqrt{3}\,x^2 + \sqrt{5} = 0,$$

ainsi que la somme $\alpha^4 + \beta^4$.

(*École Navale,* 1911.)

(*) Guyou, *loc. cit.*

On trouve

$$\alpha = 1{,}61, \qquad \beta = 0{,}92, \qquad \alpha^4 + \beta^4 = 7{,}52.$$

69. *Calculer à $\frac{1}{100}$ près par défaut la valeur numérique de la fonction*

$$y = 2\sqrt{2}x^3 - 15x^2 + 6\sqrt{3}x + 28,$$

quand on donne à x la plus grande des valeurs qui annulent la dérivée de la fonction.

(*École Navale*, 1908.)

On trouve $\qquad 15 - 6\sqrt{6} = 0{,}30,$

à $\frac{1}{100}$ près par défaut.

70. *Calculer avec la plus grande approximation possible l'expression*

$$\frac{\sqrt{a} - \sqrt{b}}{\sqrt{a} + \sqrt{b}},$$

dans laquelle on remplace a et b par les valeurs approchées à 0,01 *près par défaut des nombres*

$$a = \frac{\sqrt{\pi} + \sqrt{2}}{\sqrt{3} - \sqrt{2}}, \qquad b = \frac{\sqrt{\frac{1}{\pi}} + \sqrt{3}}{\sqrt{3} + \sqrt{2}}.$$

(*École Navale*, 1909.)

On a d'abord

$$a = 10{,}024, \qquad b = 0{,}729$$

à 0,003 par défaut, et on en déduit avec trois chiffres exacts

$$\frac{\sqrt{a} - \sqrt{b}}{\sqrt{a} + \sqrt{b}} = 0{,}575.$$

71. *Soit une progression géométrique dont le premier terme est* $\sqrt{13} - (\sqrt{2} + 1)$ *et dont la raison est* $\dfrac{1}{\sqrt{7 - \sqrt{13}}}$.

On demande de calculer à $\dfrac{1}{100}$ *près par défaut :*

1° *la somme des trois premiers termes ;*

2° *la limite vers laquelle tend la somme des termes quand le nombre des termes devient infini.*

(*École Navale*, 1907.)

On trouve : 1° 2,18 ; 2° 2,60.

72. *La diagonale d'un carré a pour expression* $\dfrac{\sqrt{\pi}}{\sqrt{3} - \sqrt{2}}$, *l'unité étant le mètre ; calculer sa surface à 1 décimètre carré près par défaut.*

(*École Navale*, 1906.)

On trouve 1554 décimètres carrés.

DEUXIÈME PARTIE

CALCULS LOGARITHMIQUES

CHAPITRE III

EXPRESSIONS ALGÉBRIQUES ET EXPONENTIELLES

73. Dans les deux chapitres précédents, nous avons montré comment on peut calculer le résultat de plusieurs opérations (addition, soustraction, multiplication, division, extraction de racine carrée) avec une approximation donnée à l'avance, choisie d'ailleurs arbitrairement.

Le plus souvent, le calcul peut être fait plus rapidement en utilisant les tables de logarithmes ; seulement, dans ce cas, l'approximation du résultat n'est plus arbitraire ; elle ne peut dépasser certaines limites, suivant la nature des tables employées.

Dans tout ce qui suivra, nous utiliserons seulement les tables de logarithmes à cinq décimales. Nous montrerons qu'elles ne permettent pas d'obtenir le résultat de plusieurs opérations avec plus de six chiffres exacts ; quelquefois le sixième et le cinquième chiffre peuvent être erronés ; parfois même, mais plus rarement, on ne peut avoir que trois chiffres exacts.

74. On sait que le logarithme (*) d'un nombre N se compose de deux parties : la partie décimale, ou *mantisse*, qui est toujours positive, et la partie entière, ou *caractéristique*, qui peut être positive, négative ou nulle.

Si le nombre N est plus grand que 1, le logarithme de N est positif, la caractéristique est positive ou nulle ; elle est égale à $n - 1$, n étant le nombre de chiffres de la partie entière de N. Si N est plus petit que 1, log N est négatif, la caractéristique est négative ; sa valeur absolue est égale au nombre de zéros placés à gauche du premier chiffre significatif de N, en comptant le zéro placé à gauche de la virgule.

Si l'on multiplie le nombre N par une puissance entière, positive ou négative, de 10, la mantisse de log N ne change pas ; seule, la caractéristique est modifiée.

Ainsi, les logarithmes des nombres 0,0045739, 0,45739, 4,5739, 47539,... ont la même mantisse ; les caractéristiques sont respectivement -3, -1, 0, 4,...

Par suite, dans le calcul d'une mantisse, on peut toujours supposer que le nombre a quatre chiffres à sa partie entière.

Les tables à cinq décimales donnent les mantisses de tous les nombres entiers compris entre 1000 et 10000, c'est-à-dire des nombres entiers de quatre chiffres. Si un nombre entier a moins de quatre chiffres, on peut le multiplier par une puissance de 10, de façon que le produit soit compris entre 1000 et 10000.

On a donc par une simple lecture les logarithmes des nombres entiers de quatre chiffres.

75. Soit maintenant à calculer le logarithme d'un nombre décimal $A + \alpha$, composé d'une partie entière de quatre chiffres A, et d'une partie décimale α, comprise entre 0 et 1.

La table nous donne log A et $\log(A + 1)$. Pour calculer $\log(A + \alpha)$, on admet que lorsque le nombre varie de A à $A + 1$,

(*) Il s'agit bien entendu du logarithme vulgaire, à base 10. De plus, quand nous parlons du logarithme d'un nombre, ce nombre est supposé positif, car les nombres négatifs n'ont pas de logarithmes.

l'accroissement du logarithme est proportionnel à l'accroissement du nombre. Quand le nombre A augmente d'une unité, son logarithme augmente de la quantité

$$\Delta = \log(A + 1) - \log A,$$

qui est appelée la *différence tabulaire* ; si le nombre A augmente de α, son logarithme augmentera de $\alpha\Delta$.

On prendra donc comme valeur approchée de $\log(A + \alpha)$ la quantité $\log A + \alpha\Delta$. L'erreur commise est alors

$$\varepsilon = \log(A + \alpha) - \log A - \alpha\Delta.$$

On démontre que cette erreur est inférieure à $\frac{1}{10^7}$ (*).

Mais les valeurs de $\log A$ et de $\log(A + 1)$, données par les tables, ne sont pas exactes ; elles sont approchées à une demi-unité près du cinquième ordre décimal. On a en effet augmenté la cinquième décimale de chaque mantisse d'une unité lorsque la sixième était égale ou supérieure à 5. Par suite, à l'erreur ε peuvent s'ajouter celles qui proviennent de l'inexactitude de $\log A$ et de Δ, et parfois l'erreur totale peut altérer la cinquième décimale de $\log(A + \alpha)$.

76. Considérons maintenant le problème inverse, qui consiste à calculer un nombre connaissant son logarithme, mais en supposant que ce logarithme ne figure pas dans la table.

Ce logarithme est alors compris entre les logarithmes de deux nombres entiers consécutifs A et $A + 1$, et si nous désignons par $A + \alpha$ le nombre cherché, nous calculons α en appliquant la même règle de proportionnalité que plus haut, c'est-à-dire en prenant pour valeur approchée de α la quantité

$$\frac{\log(A + \alpha) - \log A}{\Delta}.$$

(*) J. Tannery. — *Leçons d'algèbre et d'analyse à l'usage des élèves de mathématiques spéciales*, tome II, p. 225 (Gauthier-Villars, éditeurs).

L'erreur commise est alors

$$\varepsilon = \alpha - \frac{\log(A+\alpha) - \log A}{\Delta}.$$

On démontre que cette erreur est inférieure à $\frac{1}{1000}$.

Mais à cette erreur peuvent encore s'ajouter celles qui proviennent de l'inexactitude de Δ et de $\log A$, et dans le cas où Δ est assez petit, c'est-à-dire, lorsque A est voisin de 10 000, la somme de ces erreurs peut être voisine de $\frac{1}{10}$ (*).

Il en résulte que cette méthode de calcul donne en général α avec deux chiffres exacts au plus, et par suite $A+\alpha$ avec six chiffres exacts au plus.

D'autre part, lorsqu'on ajoute plusieurs logarithmes ainsi calculés pour obtenir le logarithme d'un produit, les erreurs commises sur ces logarithmes peuvent s'ajouter si elles sont de même signe ; puis, en combinant le logarithme obtenu avec d'autres logarithmes calculés d'une manière analogue, l'erreur peut être supérieure à plusieurs unités du cinquième ordre décimal. Et si cette erreur est supérieure à la différence tabulaire, on ne pourra compter que sur l'exactitude des trois premiers chiffres du résultat.

77. Mais à côté de ces inconvénients trop réels, l'emploi des logarithmes a d'incontestables avantages. D'abord, comme nous l'avons déjà dit, le résultat s'obtient plus rapidement ; ensuite, il y a un grand nombre de calculs qui ne peuvent être faits qu'au moyen des logarithmes, par exemple, le calcul d'un radical à indice élevé, celui de la puissance fractionnaire d'un nombre, puis le calcul des expressions trigonométriques, la résolution des équations trigonométriques, la résolution des triangles, etc.

Nous allons donner de nombreux exemples de calculs logarithmiques. Dans la plupart des tables on indique avec détails les moyens pratiques de calculer le logarithme d'un nombre donné

(*) J. Tannery, *loc. cit.*, p. 226.

qui a plus de quatre chiffres significatifs, et inversement de calculer un nombre, connaissant son logarithme, dans le cas où la mantisse de celui-ci ne figure pas dans la table : on utilise en général les tables des parties proportionnelles.

Dans tout calcul logarithmique, il faut disposer les calculs avec ordre et clarté ; il faut s'habituer à ne pas faire de brouillon.

Dans chaque exemple, il est bon d'examiner à l'avance dans quel ordre devront se faire les différentes opérations nécessaires pour obtenir le résultat demandé : calcul de logarithmes, calcul de nombres dont on connaît les logarithmes, opérations sur ces logarithmes ou sur ces nombres, etc., et ce n'est que lorsque cet ordre est bien arrêté que l'on commence le calcul.

Comme premiers exemples nous allons retrouver au moyen des logarithmes quelques-uns des résultats obtenus dans les chapitres précédents.

78. Considérons d'abord l'exercice 1 où il s'agit de calculer le produit πA, où

$$\pi = 3{,}1415926\ldots, \qquad A = 56{,}2857642\ldots$$

Nous avons $\log(\pi A) = \log \pi + \log A.$

Calculons $\log \pi$ et $\log A$; nous disposons les opérations de la façon suivante :

Calcul de $\log \pi$.		$\Delta = 14$	*Calcul de* $\log A$.		$\Delta = 8$
3141	49707		5628	75035	
5	7		5	4	
9	1,26		7	0,56	
$\log \pi = 0{,}49715$			$\log A = 1{,}75040$		

On remarque que les décimales de π qui suivent 9 et celles de A qui suivent 7 n'ont aucune influence sur la cinquième décimale de $\log \pi$ et de $\log A$; il est donc inutile de pousser plus loin la méthode des parties proportionnelles.

Nous ne conservons que les cinq premières décimales de chaque

logarithme, en augmentant la cinquième d'une unité si la sixième est supérieure ou égale à 5.

$$
\begin{array}{lrll}
\text{Nous avons alors} & \log \pi = 0{,}49715 & & \\
& \log A = 1{,}75040 & & \Delta = 25 \\
\hline
\text{et, en additionnant,} & \log (\pi A) = 2{,}24755 & & \\
& 48 & 1768\ (^*) & \\
\cline{2-2}
& 7 & & \\
& 5 & 2 & \\
\cline{2-2}
& 2 & 8 &
\end{array}
$$

On en déduit $\pi A = 176{,}828.$

Si on calcule πA par la méthode de la multiplication abrégée à $\frac{1}{10^4}$ près, on reconnaît que la deuxième décimale est égale à 2, et que la troisième est égale à 6.

Le calcul par les logarithmes nous a donné cinq chiffres exacts et le sixième à 2 unités près.

79. Calculons maintenant (ex. 5) le produit AB, où

$$A = 368{,}57, \qquad B = 0{,}543218763\ldots$$

$$
\begin{array}{ll|ll}
\multicolumn{2}{c|}{\textit{Calcul de } \log A. \quad \Delta = 12} & \multicolumn{2}{c}{\textit{Calcul de } \log B. \quad \Delta = 8} \\
3685 & 56644 & 5432 & 73496 \\
\quad 7 & 8{,}4 & \quad 1 & 0{,}8 \\
\cline{1-2}
\multicolumn{2}{l|}{\log A = 2{,}56652} & \quad 8 & 0{,}64 \\
\cline{3-4}
 & & \multicolumn{2}{l}{\log B = \bar{1}{,}73497}
\end{array}
$$

$$
\begin{array}{rll}
\log A = 2{,}56652 & & \\
\log B = \bar{1}{,}73497 & & \Delta = 22 \\
\hline
\log (AB) = 2{,}30149 & & \\
6 & 2002 & \\
\hline
3 & & \\
2{,}2 & 1 & \\
\hline
0{,}8 & 4 &
\end{array}
$$

$$AB = 200{,}214.$$

(*) Ceci veut dire que 1768 est le nombre dont le logarithme a pour mantisse 24748; il est inutile d'écrire les trois premiers chiffres 2, 4, 7, qui sont communs aux mantisses de $\log (\pi A)$ et de $\log 1768$, puisqu'il suffit de calculer la différence de ces mantisses.

80. *Calcul de* π^2 (ex. 6).

$$\log \pi = 0{,}49715$$

$$\log \pi^2 = 2 \log \pi = 0{,}99430 \qquad\qquad \Delta = 5$$

$$\begin{array}{rr} \underline{27} & 9869 \\ 3 & 6 \end{array}$$

$$\pi^2 = 9{,}8696.$$

81. On trouvera par un calcul analogue, pour le produit de l'exercice 7, 1,29385, et pour celui de l'exercice 8, 0,0011409.

82. *Soit à calculer le quotient* $\frac{A}{B}$ (ex. 9) *où*

$$A = 5{,}52314897\ldots, \qquad B = 72{,}8425\ldots$$

On trouve aisément

$$\log A = 0{,}74219, \qquad \log B = 1{,}86239,$$

et l'on a
$$\log \frac{A}{B} = \log A - \log B.$$

On calcule $-\log B$ ou colog B par la règle bien connue, et on écrit

$$\begin{array}{r} \log A = 0{,}74219 \\ \underline{-\log B = \bar{2}{,}13761} \end{array} \qquad\qquad \Delta = 6$$

$$\log \frac{A}{B} = \bar{2}{,}87980$$

$$\begin{array}{rr} \underline{78} & 7582 \\ 2 & \\ \underline{1{,}8} & 3 \\ 0{,}2 & 3 \end{array}$$

$$\frac{A}{B} = 0{,}0758233.$$

83. *Calcul de* $\frac{1}{\pi}$ (ex. 11).

$$\Delta = 13$$

$$\log \frac{1}{\pi} = -\log \pi = \bar{1}{,}50285$$

$$\begin{array}{rr} \underline{4} & 3183 \\ 1 & 08 \end{array}$$

$$\frac{1}{\pi} = 0{,}318308.$$

84. *Calcul de* $\frac{\pi}{648}$ (ex. 13).

On a
$$\log \frac{\pi}{648} = \log \pi - \log 648.$$

Le cologarithme de 648 ou $-\log 648$ se calcule immédiatement en lisant dans la table le logarithme de 648, qu'il est inutile d'écrire.

$$\begin{array}{rl}
\log \pi = & 0{,}49715 \\
-\log 648 = & \bar{3}{,}18842 \qquad \Delta = 9 \\
\hline
\log \dfrac{\pi}{648} = & \bar{3}{,}68557
\end{array}$$

$$\begin{array}{rr}
6 & 4848 \\
\hline
1 & \\
0{,}9 & 1 \\
\hline
0{,}1 & 1
\end{array}$$

$$\frac{\pi}{648} = 0{,}00484811.$$

85. *Soit à calculer l'expression* $\frac{ab}{c}$ (ex. 39), *où*

$$a = 0{,}758432\ldots, \qquad b = 4{,}251789\ldots, \qquad c = 12{,}842197\ldots$$

Nous avons
$$\log \frac{ab}{c} = \log a + \log b - \log c.$$

On dispose le calcul de la façon suivante :

Calcul de log a.

$\Delta = 6$

$$\begin{array}{rr}
7584 & 87990 \\
3 & 1{,}8 \\
2 & 0{,}12 \\
\hline
\end{array}$$
$$\log a = \bar{1}{,}87992$$

Calcul de log b.

$\Delta = 10$

$$\begin{array}{rr}
4251 & 62849 \\
78 & 7{,}8 \\
\hline
\end{array}$$
$$\log b = 0{,}62857$$

Calcul de $\log c$.

$\Delta = 33$

1284	10857
2	6,6
1	0,33

$\log c = 1,10864$

Calcul de $\frac{ab}{c}$.

$$\log a = \bar{1},87992$$
$$\log b = 0,62857$$
$$-\log c = \bar{2},89136$$

$$\log \frac{ab}{c} = \bar{1},39985$$

$$\frac{ab}{c} = 0,2511$$

Résultat.

$$\frac{ab}{c} = 0,2511.$$

86. On obtiendra de même (ex. 40)

$$\frac{e^2}{\pi} = 2,35195$$

et (ex. 41)
$$\frac{e\sqrt{2}}{\pi^3} = 0,123983,$$

en utilisant les formules

$$\log \frac{e^2}{\pi} = 2 \log e - \log \pi,$$

$$\log \frac{e\sqrt{2}}{\pi^3} = \log e + \frac{1}{2} \log 2 - 3 \log \pi.$$

87. *Calcul de* $\sqrt{\frac{ab}{c}}$ (ex. 57) *où*

$$a = 0,278592, \qquad b = 3,654786, \qquad c = 11,74826.$$

On a $\log \sqrt{\frac{ab}{c}} = \frac{1}{2} \log \frac{ab}{c} = \frac{1}{2} (\log a + \log b - \log c)$.

Calcul de $\log a$.

$\Delta = 15$

2785	44483
9	13,5
2	0,3

$\log a = \bar{1},44497$

Calcul de $\log b$.

$\Delta = 12$

3654	56277
7	8,4
8	0,96

$\log b = 0,56286$

Calcul de $\log c$.

$\Delta = 37$

1174	06967
8	29,6
2	0,74
6	0,222

$\log c = 1,06998$

Calcul de $\sqrt{\frac{ab}{c}}$.

$$\begin{aligned} \log a &= \bar{1},44497 \\ \log b &= 0,56286 \\ -\log c &= \bar{2},93002 \\ \hline \log \frac{ab}{c} &= \bar{2},93785 \end{aligned}$$

$\Delta = 15$

$$\log \sqrt{\frac{ab}{c}} = \bar{1},46893$$

79	2943
14	
13,5	9
0,5	3

$$\sqrt{\frac{ab}{c}} = 0,294393$$

Résultat.

$$\sqrt{\frac{ab}{c}} = 0,294393.$$

88. *Calculer* $x = \sqrt{1 - \frac{3\sqrt{3}}{4\pi}}$ (ex. 58).

Nous calculerons d'abord $\frac{3\sqrt{3}}{4\pi}$ au moyen des logarithmes ; nous en déduirons $1 - \frac{3\sqrt{3}}{4\pi}$, et nous extrairons la racine carrée de cette différence.

Nous utiliserons la valeur de $\log \pi$ qui a été calculée au n° 78.

Calcul de $\frac{3\sqrt{3}}{4\pi}$.

$$\begin{aligned} \log 3 &= 0,47712 \\ \log\sqrt{3} &= 0,23856 \\ -\log 4 &= \bar{1},39794 \\ -\log \pi &= \bar{1},50285 \end{aligned}$$

$\Delta = 11$

$$\log \frac{3\sqrt{3}}{4\pi} = \bar{1},61647$$

37	4134
10	9

$$\frac{3\sqrt{3}}{4\pi} = 0,41349$$

$$1 - \frac{3\sqrt{3}}{4\pi} = 0,58651$$

Calcul de x.

$\Delta = 7$

5865	76827
1	0,7

$$\log x^2 = \bar{1},76828\,(*)$$ $\Delta = 5$

$$\log x = \bar{1},88414$$

2	7658
2	4

$$x = 0,76584$$

Résultat.

$$\sqrt{1 - \frac{3\sqrt{3}}{4\pi}} = 0,76584.$$

89. *Calculer l'expression* $x = \frac{(a\pi + b)^2}{\sqrt{2\sqrt{3} + c}}$ (ex. 66) *où l'on a*

$$a = 0,11702, \qquad b = 1,43115, \qquad c = 5,01264.$$

Nous avons $\log x = 2\log(a\pi + b) - \frac{1}{2}\log\left(2\sqrt{3} + c\right)$.

(*) $\log x$ est la moitié de $\log x^2$; pour diviser $\log x^2$ par 2, on remarque que l'on a $\log x^2 = -1 + 0,76828$;
on écrit $\log x^2 = -2 + 1,76828$,
et on divise par 2 chacun des termes de cette différence. On a ainsi

$$\log x = -1 + 0,88414 = \bar{1},88414.$$

On opère de la même manière pour diviser par un nombre entier un logarithme dont la caractéristique est négative et n'est pas divisible par ce nombre.

Ainsi pour diviser par 5 $\log A = \bar{3},84735$,
on écrit $\log A = \bar{5} + 2,84735$,
l'on a $\frac{1}{5}\log A = \bar{1} + 0,56947 = \bar{1},56947$.

Nous calculerons d'abord $a\pi$, puis $a\pi + b$ et $\log(a\pi + b)$; ensuite, nous calculerons $2\sqrt{3}$, puis $2\sqrt{3} + c$ et enfin $\log(2\sqrt{3} + c)$.

Calcul de $\log a$.

$\Delta = 37$

1170	06819
2	7,4

$\log a = \bar{1},06826$

Calcul de $a\pi$.

$$\log a = \bar{1},06826$$
$$\log \pi = 0,49715$$
$$\log(a\pi) = \bar{1},56541$$

$\Delta = 11$

38	3676
3	3

$$a\pi = 0,36763$$
$$b = 1,43115$$
$$a\pi + b = 1,79878$$

Calcul de $\log(a\pi + b)$.

$\Delta = 24$

1798	25479
7	16,8
8	1,92

$$\log(a\pi + b) = 0,25498$$
$$2\log(a\pi + b) = 0,50996$$

Calcul de $2\sqrt{3}$.

$$\log 2 = 0,30103$$
$$\log\sqrt{3} = 0,23856$$
$$\log 2\sqrt{3} = 0,53959$$

$\Delta = 12$

8	3464
1	1

$$2\sqrt{3} = 3,46410$$
$$c = 5,01264$$
$$2\sqrt{3} + c = 8,47674$$

Calcul de $\log(2\sqrt{3} + c)$.

$\Delta = 5$

8476	92819
7	3,5
4	0,2

$$\log(2\sqrt{3} + c) = 0,92823$$
$$\frac{1}{2}\log(2\sqrt{3} + c) = 0,46411$$

Calcul de x.

$$2\log(a\pi + b) = 0,50996$$
$$-\frac{1}{2}\log(2\sqrt{3} + c) = \bar{1},53589$$
$$\log x = 0,04585$$

$\Delta = 39$

71	1111
14	
11,7	3
2,3	6

$$x = 1,11136$$

Résultat.

$$x = 1,11136$$

90. *Calculer l'expression*

$$x = \frac{\sqrt[3]{a\sqrt[4]{b}}}{\sqrt[5]{c}\,.\,d^3},$$

où l'on pose

$$a = 234{,}75, \qquad b = 34{,}228, \qquad c = 78{,}543, \qquad d = 0{,}28314.$$

On peut remarquer que

$$\sqrt[3]{a\sqrt[4]{b}} = \sqrt[3]{a} \cdot \sqrt[12]{b}\,;$$

on en déduit

$$\log x = \frac{1}{3}\log a + \frac{1}{12}\log b - \frac{1}{5}\log c - 3\log d.$$

Calcul de $\log a$.

$$\begin{array}{lr} & \Delta = 19 \\ 2347 & 37051 \\ \quad 5 & 9{,}5 \\ \hline \log a = 2{,}37061 & \\ \frac{1}{3}\log a = 0{,}79020 & \end{array}$$

Calcul de $\log b$.

$$\begin{array}{lr} & \Delta = 13 \\ 3422 & 53428 \\ \quad 8 & 10{,}4 \\ \hline \log b = 1{,}53438 & \\ \frac{1}{12}\log b = 0{,}12786 & \end{array}$$

Calcul de $\log c$.

$$\begin{array}{lr} & \Delta = 6 \\ 7854 & 89509 \\ \quad 3 & 1{,}8 \\ \hline \log c = 1{,}89511 & \\ \frac{1}{5}\log c = 0{,}37902 & \end{array}$$

Calcul de $\log d$.

$$\begin{array}{lr} & \Delta = 15 \\ 2831 & 45194 \\ \quad 4 & 6 \\ \hline \log d = \bar{1}{,}45200 & \\ 3\log d = \bar{2}{,}35600 & \end{array}$$

Calcul de x.

$$\begin{array}{rl} \frac{1}{3}\log a = & 0{,}79020 \\ \frac{1}{12}\log b = & 0{,}12786 \\ -\frac{1}{5}\log c = & \bar{1}{,}62098 \\ -3\log d = & 1{,}64400 \\ \hline \log x = & 2{,}18304 \end{array} \qquad \Delta = 29$$

$$\begin{array}{rr} 298 & 1524 \\ \hline 6 & \\ 5{,}8 & 2 \\ \hline 0{,}2 & 1 \end{array}$$

$$x = 152{,}421$$

Résultat.

$$x = 152{,}421.$$

91. *Calculer les six premières puissances*

$$x, x^2, \dots x^6, \qquad y, y^2, \dots y^6,$$

des nombres x et y définis par les formules

$$x = \sqrt[4]{\frac{942\pi}{877}}, \qquad y = \sqrt[4]{\frac{40200}{177\pi}}.$$

On prendra $\pi = 3{,}1416.$

(*École Centrale*, 1918.)

Calcul de $\log \pi$. $\Delta = 14$

3141	49707
6	8,4

$\log \pi = 0{,}49715$

Calcul de $\log x$.

$$\begin{aligned} \log 942 &= 2{,}97405 \\ \log \pi &= 0{,}49715 \\ -\log 877 &= \bar{3}{,}05700 \\ \hline 4 \log x &= 0{,}52820 \\ \log x &= 0{,}13205 \end{aligned}$$

Calcul de x. $\Delta = 32$

$\log x = 0{,}13205$

194	1355
11	3

$x = 1{,}3553$

Calcul de x^2.

$\log x^2 = 0{,}26410$

$x^2 = 1{,}8370$

Calcul de x^3. $\Delta = 18$

$\log x^3 = 0{,}39615$

02	2489
13	7

$x^3 = 2{,}4897$

Calcul de x^4. $\Delta = 12$

$\log x^4 = 0{,}52820$

15	3374
5	4

$x^4 = 3{,}3744$

Calcul de x^5. $\Delta = 10$

$\log x^5 = 0{,}66025$

0	4573
5	5

$x^5 = 4{,}5735$

Calcul de x^6. $\Delta = 7$

$\log x^6 = 0{,}79230$

25	6198
5	7

$x^6 = 6{,}1987$

Calcul de log y.

$$\log 40200 = 4{,}60423$$
$$-\log 877 = \bar{3}{,}05700$$
$$-\log \pi = \bar{1}{,}50285$$
$$4 \log y = 1{,}16408$$
$$\log y = 0{,}29102$$

Calcul de y.

$\Delta = 23$

$\log y = 0{,}29102$

092 1954

10 4

$y = 1{,}9544$

Calcul de y^2.

$\Delta = 11$

$\log y^2 = 0{,}58204$

195 3819

9 8

$y^2 = 3{,}8198$

Calcul de y^3.

$\Delta = 6$

$\log y^3 = 0{,}87306$

3 7465

3 5

$y^3 = 7{,}4655$

Calcul de y^4.

$\Delta = 29$

$\log y^4 = 1{,}16408$

6 1459

2 1

$y^4 = 14{,}591$

Calcul de y^5.

$\Delta = 15$

$\log y^5 = 1{,}45510$

00 2851

10 7

$y^5 = 28{,}517$

Calcul de y^6.

$\Delta = 8$

$\log y^6 = 1{,}74612$

09 5573

3 4

$y^6 = 55{,}734$

Résultats.

$x = 1{,}3553$,	$y = 1{,}9544$,
$x^2 = 1{,}8370$,	$y^2 = 3{,}8198$,
$x^3 = 2{,}4897$,	$y^3 = 7{,}4655$,
$x^4 = 3{,}3744$,	$y^4 = 14{,}591$,
$x^5 = 4{,}5735$,	$y^5 = 28{,}517$,
$x^6 = 6{,}1987$,	$y^6 = 55{,}734$.

92. *Calculer les nombres t et u tels que*

$$(1,71)^t = \pi, \qquad (0,171)^u = \frac{1}{\pi}.$$

(*École Centrale*, 1918.)

$$t \log 1,71 = \log \pi$$

$$t = \frac{\log \pi}{\log 1,71}$$

$$\log t = \log\log \pi - \log\log 1,71$$

Calcul de $\log \pi$.

$\Delta = 14$

3141	49707
6	8,4

$$\log \pi = 0,49715$$

Calcul de $\log\log \pi$.

$\Delta = 9$

4971	69644
5	4,5

$$\log\log \pi = \bar{1},69649$$

$$\log 1,71 = 0,23300$$

$$\log\log 1,71 = \bar{1},36736$$

Calcul de t.

$$\log\log \pi = \bar{1},69649$$
$$-\log\log 1,71 = 0,63264$$
$$\log t = 0,32913$$

$\Delta = 20$

899	2133
14	7

$$t = 2,1337$$

$$u \log 0,171 = -\log \pi$$

$$u = \frac{-\log \pi}{\log 0,171} = \frac{-\log \pi}{\bar{1},23300} = \frac{\log \pi}{0,76700}$$

$$\log u = \log\log \pi - \log 0,76700$$

Calcul de u.

$$\log\log \pi = \bar{1},69649$$
$$-\log 0,767 = 0,11520$$
$$\log u = \bar{1},81169$$

$\Delta =$ [illegible]

4	6481
5	7

$$u = 0,64817$$

Résultats.

$$t = 2,1337, \qquad u = 0,64817.$$

93. *Calculer les valeurs positives de x et de y qui vérifient les équations*

$$x^y = y^x, \qquad x^p = y^q,$$

p et q étant deux nombres donnés positifs, $p > q$.

(J. Bertrand.)

Application numérique : $p = 4{,}5783, \qquad q = 1{,}7598.$

Le système proposé est équivalent au suivant :

$$(1) \quad y \log x = x \log y, \qquad (2) \quad p \log x = q \log y.$$

On peut remplacer l'équation (1) par l'équation $\frac{x}{q} = \frac{y}{p}$, ou par

$$(3) \qquad \log y - \log x = \log \frac{p}{q}.$$

En résolvant alors les deux équations (2) et (3) par rapport à $\log x$ et $\log y$, on a

$$\log x = \frac{q \log \frac{p}{q}}{p - q}, \qquad \log y = \frac{p \log \frac{p}{q}}{p - q},$$

ou

$$\log \log x = \log q + \log \log \frac{p}{q} - \log (p - q),$$

$$\log \log y = \log p + \log \log \frac{p}{q} - \log (p - q).$$

Appliquons ces formules au cas où l'on a

$$p = 4{,}5783, \qquad q = 1{,}7598,$$

et
$$p - q = 2{,}8185.$$

Calcul de $\log p$.

$\Delta = 9$

4578	66068
3	2,7

$\log p = 0,66071$

Calcul de $\log q$.

$\Delta = 24$

1759	24527
8	19,2

$\log q = 0,24546$

Calcul de $\log (p - q)$.

$\Delta = 16$

2818	44994
5	8

$\log (p - q) = 0,45002$

Calcul de $\log \log \frac{p}{q}$.

$\log p = 0,66071$

$- \log q = \bar{1},75454$

$\log \frac{p}{q} = 0,41525$

$\Delta = 10$

4152	61826
5	5

$\log \log \frac{p}{q} = \bar{1},61831$

Calcul de x.

$\log q = 0,24546$

$\log \log \frac{p}{q} = \bar{1},61831$

$- \log (p - q) = \bar{1},54998$ $\Delta = 17$

$\log \log x = \bar{1},41375$

63	2592
12	7

$\Delta = 23$

$\log x = 0,25927$

12	1816
15	7

$x = 1,8167$

Calcul de y.

$\log p = 0,66071$

$\log \log \frac{p}{q} = \bar{1},61831$

$- \log (p - q) = \bar{1},54998$ $\Delta = 7$

$\log \log y = \bar{1},82900$

898	6745
2	3

$\Delta = 10$

$\log y = 0,67453$

49	4726
4	4

$y = 4,7264$

Résultats.

$x = 1,8167,$ $y = 4,7264.$

94. *Calculer les valeurs positives de x et de y qui vérifient les équations*

$$x^y = y^x, \qquad p^x = q^y,$$

p et q étant deux constantes positives, plus grandes que 1 et telles que $p > q$.

(J. BERTRAND.)

Application numérique : $p = 8, \quad q = 5.$

On trouve

$$\log x = \frac{\log q \log\left(\dfrac{\log p}{\log q}\right)}{\log p - \log q},$$

$$\log y = \frac{\log p \log\left(\dfrac{\log p}{\log q}\right)}{\log p - \log q}.$$

En remplaçant p par 8 et q par 5, on a

$$\log x = \frac{0{,}69897 \times 0{,}11128}{0{,}20412},$$

$$\log y = \frac{0{,}90309 \times 0{,}11128}{0{,}20412},$$

puis

$$\log\log x = \bar{1}{,}58100,$$

$$\log\log y = \bar{1}{,}69228,$$

et enfin $x = 2{,}4047, \qquad y = 3{,}1071.$

CHAPITRE IV

EXPRESSIONS TRIGONOMÉTRIQUES
ÉQUATIONS TRIGONOMÉTRIQUES

---

95. Dans les tables de logarithmes est indiquée la méthode pratique pour calculer le logarithme d'une ligne trigonométrique d'un angle donné, et, inversement, pour calculer un angle, quand on connaît le logarithme d'une de ses lignes trigonométriques. Le procédé est à peu près le même que pour les nombres.

Il y a cependant une différence essentielle, c'est lorsqu'il s'agit de calculer le logarithme d'un cosinus ou d'une cotangente ; car, dans ce cas, le logarithme varie en sens contraire de l'angle. On prend alors l'angle par excès, de façon à ajouter au logarithme les différents nombres fournis par la table des parties proportionnelles. De même, pour calculer un angle connaissant le log cos ou le log cot, on prend le logarithme par excès.

La méthode des parties proportionnelles ne s'applique plus pour calculer les log sin ou les log tg des angles inférieurs à 3 grades ou à 3 degrés. Pour calculer ces logarithmes on utilise une autre méthode, exposée dans toutes les tables, et où l'on se sert des logarithmes des rapports $\frac{\sin x}{x}$ et $\frac{\operatorname{tg} x}{x}$.

Enfin, tout ce que nous avons dit (75) au sujet des erreurs qui s'introduisent dans les calculs des logarithmes des nombres

peut se répéter pour les logarithmes des lignes trigonométriques, et quand on a calculé un angle à la suite de plusieurs opérations logarithmiques, il peut arriver que l'erreur commise sur le résultat soit de plusieurs secondes sexagésimales ou centésimales.

96. *Étant donné le logarithme d'une ligne trigonométrique d'un angle, calculer le logarithme d'une autre ligne trigonométrique du même angle.*

On pourrait, connaissant le premier logarithme, calculer l'angle et en déduire le deuxième logarithme, mais il est préférable d'éviter le calcul de l'angle et d'opérer de la façon suivante.

1° Supposons d'abord que les deux lignes trigonométriques varient dans le même sens, sinus et tangente, ou cosinus et cotangente.

Par exemple, soit à calculer $\log \operatorname{tg} \alpha$, connaissant $\log \sin \alpha$.

On cherche dans la table de logarithmes les deux log sin consécutifs qui comprennent le $\log \sin \alpha$ donné ; soient α_1 et α_2 les angles correspondants, on a

$$\log \sin \alpha_1 < \log \sin \alpha < \log \sin \alpha_2.$$

On lit sur les mêmes lignes $\log \operatorname{tg} \alpha_1$ et $\log \operatorname{tg} \alpha_2$, et l'on a

$$\log \operatorname{tg} \alpha_1 < \log \operatorname{tg} \alpha < \log \operatorname{tg} \alpha_2.$$

Nous admettons que dans l'intervalle (α_1, α_2) la variation du log sin est proportionnelle à celle du log tg, ce qui nous donne

$$(1) \qquad \frac{\log \operatorname{tg} \alpha - \log \operatorname{tg} \alpha_1}{\log \operatorname{tg} \alpha_2 - \log \operatorname{tg} \alpha_1} = \frac{\log \sin \alpha - \log \sin \alpha_1}{\log \sin \alpha_2 - \log \sin \alpha_1}.$$

Nous lisons dans la table les différences tabulaires

$$\Delta_s = \log \sin \alpha_2 - \log \sin \alpha_1,$$
$$\Delta_t = \log \operatorname{tg} \alpha_2 - \log \operatorname{tg} \alpha_1$$

et nous calculons la différence

$$D = \log \sin \alpha - \log \sin \alpha_1.$$

L'égalité (1) peut alors s'écrire

$$\log \operatorname{tg} \alpha - \log \operatorname{tg} \alpha_1 = \frac{D\Delta_t}{\Delta_s},$$

ou

$$\log \operatorname{tg} \alpha = \log \operatorname{tg} \alpha_1 + \frac{D\Delta_t}{\Delta_s}.$$

97. Exemple. — *On donne* $\log \sin \alpha = \overline{1},80167$, *calculer* $\log \operatorname{tg} \alpha$.

Nous utilisons les tables où les angles sont mesurés en grades. Nous lisons

$$\log \sin \alpha_1 = \overline{1},80161, \qquad \log \operatorname{tg} \alpha_1 = \overline{1},91292,$$

$$\Delta_s = 8 \qquad\qquad \Delta_t = 14$$

et

$$D = \log \sin \alpha - \log \sin \alpha_1 = 6.$$

Par suite,

$$\log \operatorname{tg} \alpha = \log \operatorname{tg} \alpha_1 + \frac{6 \times 14}{8} = \overline{1},91292 + 10,5,$$

$$\log \operatorname{tg} \alpha = \overline{1},91303.$$

On peut se servir des tables des parties proportionnelles pour calculer le rapport $\frac{6 \times 14}{8}$. On calcule à l'aide de ces tables les différents chiffres du quotient $\frac{6}{8}$, et on multiplie ces chiffres par 14.

On peut d'ailleurs disposer les calculs de la façon suivante :

$$\begin{array}{lr}
\log \sin \alpha = & \overline{1},80167 \\
\log \sin \alpha_1 = & \overline{1},80161 \\
\hline
D = & 6 \\
 & 5,6 \\
\hline
 & 0,4
\end{array}
\qquad
\begin{array}{lr}
\Delta_s = 8 & \Delta_t = 14 \\
\log \operatorname{tg} \alpha_1 = & \overline{1},91292 \\
0,7 \times 14 & 9,8 \\
0,05 \times 14 & 0,7 \\
\hline
\log \operatorname{tg} \alpha = & \overline{1},91303
\end{array}$$

98. Autre exemple. — *On donne* $\log \cot \alpha = \bar{1},65037$, *calculer* $\log \cos \alpha$.

$$\begin{array}{lr}
\log \cot \alpha = \bar{1},65037 & \\
\log \cot \alpha_1 = \bar{1},65029\ (^*) & \\
\hline
D = & 8 \\
 & 7,6 \\
\hline
 & 0,4
\end{array}
\qquad
\begin{array}{lr}
\Delta_{\cot} = 19 & \Delta_{\cos} = 15 \\
\log \cos \alpha_1 = \bar{1},61074 & \\
0,4 \times 15 & 6 \\
0,02 \times 15 & 0,3 \\
\hline
\log \cos \alpha = \bar{1},61080 &
\end{array}$$

2° Si les deux lignes trigonométriques ne varient pas dans le même sens, sinus et cotangente, sinus et cosinus, tangente et cosinus,... on prend le logarithme immédiatement supérieur au logarithme donné ; de cette façon, pour calculer le logarithme inconnu, on fait des additions comme dans le premier cas.

99. Exemple. — *On donne* $\log \mathrm{tg}\, \alpha = 0,06086$, *calculer* $\log \cos \alpha$.

$$\begin{array}{lr}
\log \mathrm{tg}\, \alpha = 0,06086 & \\
\log \mathrm{tg}\, \alpha_1 = 0,06091 & \\
\hline
D = & 5 \\
 & 3,9 \\
\hline
 & 1,1
\end{array}
\qquad
\begin{array}{lr}
\Delta_t = 13 & \Delta_c = 8 \\
\log \cos \alpha_1 = \bar{1},81690 & \\
0,3 \times 8 & 2,4 \\
0,08 \times 8 & 0,64 \\
\hline
\log \cos \alpha = \bar{1},81693 &
\end{array}$$

100. Autre exemple. — *On donne* $\log \cos \alpha = \bar{1},93237$, *calculer* $\log \sin \alpha$.

$$\begin{array}{lr}
\log \cos \alpha = \bar{1},93237 & \\
\log \cos \alpha_1 = \bar{1},93238 & \\
\hline
D = & 1 \\
 & 0,8 \\
\hline
 & 0,2
\end{array}
\qquad
\begin{array}{lr}
\Delta_c = 4 & \Delta_s = 12 \\
\log \sin \alpha_1 = \bar{1},71371 & \\
0,2 \times 12 & 2,4 \\
0,05 \times 12 & 0.6 \\
\hline
\log \sin \alpha = \bar{1},71374 &
\end{array}$$

(*) Dans cet exemple l'angle α_1 est plus grand que α.

101. EXEMPLE INVERSE. — *On donne* $\log \sin \alpha = \bar{1},71374$, *calculer* $\log \cos \alpha$.

$$\begin{array}{lr}
\log \sin \alpha = \bar{1},71374 & \\
\log \sin \alpha_1 = \bar{1},71383 & \\
\hline
D = \quad 9 & \\
8,4 & \\
\hline
0,6 &
\end{array}
\qquad
\begin{array}{lr}
\Delta_s = 12 & \Delta_c = 4 \\
\log \cos \alpha_1 = \bar{1},93234 & \\
0,7 \times 4 & 2,8 \\
0,05 \times 4 & 0,2 \\
\hline
\log \cos \alpha = \bar{1},93237 &
\end{array}$$

102. *On donne* $\log \sin \alpha = \bar{1},57644$, *calculer* $\log \operatorname{tg} \alpha$ *et* $\log \cos \alpha$.

On trouve $\log \operatorname{tg} \alpha = \bar{1},60974$, $\log \cos \alpha = \bar{1},96670$.

103. *Soit*
$$\omega = \frac{2\pi}{11} = \frac{400^g}{11}.$$

1° *Calculer les valeurs numériques de chacune des quantités :* $\sin \omega$, $\sin 3\omega$, $\sin 4\omega$, $\sin 5\omega$, $\sin 9\omega$.

2° *Calculer, en se servant des valeurs précédentes, l'expression*
$$4(\sin \omega + \sin 3\omega + \sin 4\omega + \sin 5\omega + \sin 9\omega)^2.$$

N. B. — *Les calculs seront faits avec des tables centésimales à cinq décimales.*

(*École Polytechnique,* 1907.)

On a

$$\sin \omega = \sin \frac{2\pi}{11} = \sin \frac{400^g}{11} = \sin 36^g,3636,$$

$$\sin 3\omega = \sin \frac{6\pi}{11} = \sin \frac{5\pi}{11} = \sin \frac{1000^g}{11} = \sin 90^g,9091,$$

$$\sin 4\omega = \sin \frac{8\pi}{11} = \sin \frac{3\pi}{11} = \sin \frac{600^g}{11} = \sin 54^g,5455,$$

$$\sin 5\omega = \sin \frac{10\pi}{11} = \sin \frac{\pi}{11} = \sin \frac{200^g}{11} = \sin 18^g,1818,$$

$$\sin 9\omega = \sin \frac{18\pi}{11} = -\sin \frac{4\pi}{11} = -\sin \frac{800^g}{11} = -\sin 72^g,7273.$$

Calcul de $\sin \omega$.

$\Delta = 11$

$36,36$	$\bar{1},73287$
3	$3,3$
6	$0,66$

$\Delta = 8$

$\log \sin \omega = \bar{1},73291$

$$\begin{array}{rr} \underline{88} & 5406 \\ 3 & 4 \end{array}$$

$\sin \omega = 0,54064$

Calcul de $\sin 3\omega$.

$\Delta = 4$

$\log \sin 3\omega = \bar{1},99556$

$$\begin{array}{rr} \underline{5} & 9898 \\ 1 & 2 \end{array}$$

$\sin 3\omega = 0,98982$

Calcul de $\sin 4\omega$.

$\Delta = 5$

$54,54$	$\bar{1},87835$
5	$2,5$
5	$0,25$

$\Delta = 6$

$\log \sin 4\omega = \bar{1},87838$

$$\begin{array}{rr} \underline{5} & 7557 \\ 3 & 5 \end{array}$$

$\sin 4\omega = 0,75575$

Calcul de $\sin 5\omega$.

$\Delta = 24$

$18,18$	$\bar{1},44979$
1	$2,4$
8	$1,92$

$\Delta = 15$

$\log \sin 5\omega = \bar{1},44983$

$$\begin{array}{rr} \underline{79} & 2817 \\ 4 & 3 \end{array}$$

$\sin 5\omega = 0,28173$

Calcul de $\sin 9\omega$.

$\Delta = 3$

$72,72$	$\bar{1},95884$
7	$2,1$
3	$0,09$

$\Delta = 5$

$\log |\sin 9\omega| = \bar{1},95886$

$$\begin{array}{rr} \underline{5} & 9096 \\ 1 & 2 \end{array}$$

$\sin 9\omega = -0,90962 = \bar{1},09038$

Calcul de S.

$$S = \sin \omega + \sin 3\omega + \sin 4\omega + \sin 5\omega + \sin 9\omega.$$

$$\begin{aligned} \sin \omega &= 0,54064 \\ \sin 3\omega &= 0,98982 \\ \sin 4\omega &= 0,75575 \\ \sin 5\omega &= 0,28173 \\ \sin 9\omega &= \bar{1},09038 \\ \hline S &= 1,65832 \end{aligned}$$

Calcul de $\log S$.

$\Delta = 27$

1658	21958
3	$8,1$
2	$0,54$

$\log S = 0,21967$

Calcul de $4S^2$.

$$\begin{aligned} 2 \log S &= 0,43934 \\ \log 4 &= 0,60206 \\ \hline \log 4S^2 &= 1,04140 \\ 4S^2 &= 11 \end{aligned}$$

Résultats.

$\sin \omega = 0,54064$, $\sin 3\omega = 0,98982$, $\sin 4\omega = 0,75575$,

$\sin 5\omega = 0,28173$, $\sin 9\omega = -0,90962$.

$$4(\sin \omega + \sin 3\omega + \sin 4\omega + \sin 5\omega + \sin 9\omega)^2 = 11.$$

104. *Calculer :*

1° *tous les angles x, compris entre zéro et douze angles droits, qui vérifient l'équation*

$$(1) \qquad \sin x = \frac{2}{3}\,;$$

2° *les valeurs correspondantes du nombre y défini par la formule*

$$y = \frac{\sin \frac{x}{3}}{4 - \sqrt{8}}.$$

(*École Centrale*, 1912.)

1° Calculons d'abord en grades l'angle aigu α qui vérifie l'équation (1).

$$\begin{array}{rl} \log 2 = & 0{,}30103 \\ -\log 3 = & \bar{1}{,}52288 \\ \hline \log \sin \alpha = & \bar{1}{,}82391 \end{array} \qquad \Delta = 8$$

$$\begin{array}{lll} & 86 & 46{,}45 \\ \hline & 5 & \\ & 4{,}8 & 6 \\ \hline & 0{,}2 & 3 \end{array}$$

$$\alpha = 46{,}4563,$$

en prenant le grade pour unité.

Tous les angles qui vérifient la relation (1) sont définis par les expressions

$$(2) \qquad 400k + \alpha, \qquad 400k + 200 - \alpha,$$

k désignant un nombre entier, positif, négatif ou nul.

Nous aurons les angles compris entre zéro et douze angles droits en donnant à k les valeurs 0, 1, 2 dans les expressions (2).

Nous obtenons ainsi les six angles suivants :

$$\begin{array}{ll} x_1 = \alpha = 46{,}4563, & x_4 = 200 - \alpha = 153{,}5437, \\ x_2 = 400 + \alpha = 446{,}4563, & x_5 = 600 - \alpha = 553{,}5437, \\ x_3 = 800 + \alpha = 846{,}4563, & x_6 = 1\,000 - \alpha = 953{,}5437. \end{array}$$

2° Les valeurs de $\frac{x}{3}$ sont alors

$$\frac{x_1}{3} = \frac{\alpha}{3} = 15,4854, \qquad \frac{x_4}{3} = \frac{200 - \alpha}{3} = 51,1812,$$

$$\frac{x_2}{3} = \frac{400 + \alpha}{3} = 148,8188, \qquad \frac{x_5}{3} = \frac{600 - \alpha}{3} = 184,5146,$$

$$\frac{x_3}{3} = \frac{800 + \alpha}{3} = 282,1521, \qquad \frac{x_6}{3} = \frac{1\,000 - \alpha}{3} = 317,8479.$$

Or, on a

$$\frac{x_1}{3} + \frac{x_5}{3} = \frac{\alpha}{3} + \frac{600 - \alpha}{3} = 200,$$

$$\frac{x_2}{3} + \frac{x_4}{3} = \frac{400 + \alpha}{3} + \frac{200 - \alpha}{3} = 200,$$

$$\frac{x_3}{3} + \frac{x_6}{3} = \frac{800 + \alpha}{3} + \frac{1\,000 - \alpha}{3} = 600\,;$$

par suite,

$$\sin\frac{x_5}{3} = \sin\frac{x_1}{3}, \qquad \sin\frac{x_4}{3} = \sin\frac{x_2}{3}, \qquad \sin\frac{x_6}{3} = \sin\frac{x_3}{3}.$$

Il existe donc seulement trois valeurs de y :

$$y_1 = \frac{\sin\frac{x_1}{3}}{4 - \sqrt{8}}, \qquad y_2 = \frac{\sin\frac{x_2}{3}}{4 - \sqrt{8}}, \qquad y_3 = \frac{\sin\frac{x_3}{3}}{4 - \sqrt{8}}.$$

On en conclut que y_1 et y_2 sont positifs et y_3 négatif.

Pour calculer $\log y_2$, on remplace $\frac{x_2}{3}$ par son supplément et on écrit

$$\sin\frac{x_2}{3} = \sin 51,1812\,;$$

pour calculer $\log|y_3|$, on remplace $\frac{x_3}{3}$ par $\frac{x_3}{3} - 200$, et l'on a

$$\sin\frac{x_3}{3} = -\sin 82,1521.$$

Remarquons enfin que l'on a

$$4 - \sqrt{8} = 2\sqrt{2}(\sqrt{2} - 1) = 2\sqrt{2}\,\mathrm{tg}\,25^{\mathrm{g}}.$$

Calcul de $\log(4-\sqrt{8})$.

$$\log 2 = 0{,}30103$$
$$\frac{1}{2}\log 2 = 0{,}15052$$
$$\log \operatorname{tg} 25 = \bar{1}{,}61722$$
$$\log(4-\sqrt{8}) = 0{,}06877$$

Calcul de y_1.

$\Delta = 28$

15,48	$\bar{1},38160$	
5	14	
4	1,12	

$$\log\sin\frac{x_1}{3} = \bar{1}{,}38175$$
$$-\log(4-\sqrt{8}) = \bar{1}{,}93123$$

$\Delta = 21$

$$\log y_1 = \bar{1}{,}31298$$

81	2055
17	8

$$y_1 = 0{,}20558$$

Calcul de y_2.

$\Delta = 6$

51,18	$\bar{1},85739$
1	0,6
2	0,12

$$\log\sin\frac{x_2}{3} = \bar{1}{,}85740$$
$$-\log(4-\sqrt{8}) = \bar{1}{,}93123$$

$\Delta = 7$

$$\log y_2 = \bar{1}{,}78863$$

59	6146
4	6

$$y_2 = 0{,}61466$$

Calcul de y_3.

$$\log\left|\sin\frac{x_3}{3}\right| = \bar{1}{,}98270$$
$$-\log(4-\sqrt{8}) = \bar{1}{,}93123$$

$\Delta = 5$

$$\log|y_3| = \bar{1}{,}91393$$

2	8202
1	2

$$y_3 = -0{,}82022$$

Résultats.

1° $x_1 = 46^g{,}4563$, $x_2 = 446^g{,}4563$, $x_3 = 846^g{,}4563$,
$x_4 = 153^g{,}5437$, $x_5 = 553^g{,}5437$, $x_6 = 953^g{,}5437$.

2° $y_1 = 0{,}20558$, $y_2 = 0{,}61466$, $y_3 = -0{,}82022$.

105. *Calculer, soit en grades, soit en degrés, l'angle x, l'angle y et l'angle z, compris tous les trois entre zéro et deux angles droits, qui vérifient les équations*

$$\cos x = \sqrt[3]{\frac{31625}{325138}},$$

$$\operatorname{tg} y = \frac{2+\sqrt{3}}{\sqrt{3}}, \qquad \operatorname{tg} z = \frac{\sin 2x}{\operatorname{tg} 2y}.$$

(*École Centrale,* 1911.)

La seconde équation peut s'écrire $\operatorname{tg} y = 1 + \frac{2}{\sqrt{3}}$; pour la rendre calculable par logarithmes nous déterminerons un angle φ, inférieur à un angle droit, par la formule

$$\operatorname{tg}^2 \varphi = \frac{2}{\sqrt{3}},$$

et nous aurons
$$\operatorname{tg} y = \frac{1}{\cos^2 \varphi}.$$

Nous n'aurons pas besoin de calculer l'angle φ, car conformément à ce que nous avons vu au n° 96, de log tg φ nous déduirons log cos φ.

Pour simplifier l'écriture, nous poserons

$$a = 31625, \qquad b = 325138,$$

et nous aurons les formules

$$\cos x = \sqrt[3]{\frac{a}{b}}, \qquad \operatorname{tg}^2 \varphi = \frac{2}{\sqrt{3}}, \qquad \operatorname{tg} y = \frac{1}{\cos^2 \varphi}, \qquad \operatorname{tg} z = \frac{\sin 2x}{\operatorname{tg} 2y}.$$

Nous ferons le calcul successivement en grades et en degrés.

I. Calcul en grades.

Calcul de log a. $\Delta = 14$

3162	49996
5	7

log $a = 4,50003$

Calcul de log b. $\Delta = 13$

3251	51202
3	3,9
8	1,04

log $b = 5,51207$

Calcul de x.

$$\log a = 4,50003$$
$$-\log b = \bar{6},48793$$
$$3 \log \cos x = \bar{2},98796$$
$$\log \cos x = \bar{1},66265 \qquad \Delta = 14$$

76 (*)	69,57	
11		
9,8		7
1,2		9

$x = 69,5779$

$2x = 139,1558$

(*) Nous prenons ici le log cos immédiatement supérieur à log cos x, car x et log cos x ient en sens contraires. On fait de même si l'on a un log cot.

Calcul de log tg φ *et* log cos φ.

$$\log 3 = 0,47712$$
$$\log \sqrt{3} = 0,23856$$
$$-\log \sqrt{3} = \bar{1},76144$$
$$\log 2 = 0,30103$$

$$2 \log \operatorname{tg} \varphi = 0,06247$$

$\Delta_t = 14 \quad \Delta_c = 7$

$$\log \operatorname{tg} \varphi = 0,03123$$

0,03127	$\bar{1}$,83329
4	2

$$\log \cos \varphi = \bar{1},83331$$
$$2 \log \cos \varphi = \bar{1},66662$$

Calcul de y.

$\Delta = 18$

$$\log \operatorname{tg} y = 0,33338$$

25	72,33
13	
12,6	7
0,4	2

$$y = 72,3372$$
$$2y = 144,6744$$

Calcul de log sin $2x$.

$$2x = 139,1558.$$
$$200 - 2x = 60,8442$$

$\Delta = 5$

60,84	$\bar{1}$,91206
4	2
2	0,1

$$\log \sin 2x = \bar{1},91208$$

Calcul de log | tg $2y$ |.

$$2y = 144,6744$$
$$200 - 2y = 55,3256$$

$\Delta = 13$

55,32	0,07293
5	6,5
6	0,78

$$\log |\operatorname{tg} 2y| = 0,07300$$

Calcul de z.

$$\log \sin 2x = \bar{1},91208$$
$$-\log |\operatorname{tg} 2y| = \bar{1},92700$$

$\Delta = 15$

$$\log |\operatorname{tg} z| = \bar{1},83908$$

898	38,46
10	
9	6
1	7

$$200 - z = 38,4667$$
$$z = 161,5333$$

Résultats.

$x = 69^g,5779, \qquad y = 72^g,3372, \qquad z = 161^g,5333.$

II. Calcul en degrés.

Calcul de x.

$\Delta = 24$

$\log \cos x = \bar{1},66265$		
70		$62^\circ\,37'$
5		
4		$10''$
1		
0,8		$2''$
0,2		5

$x = 62^\circ\,37'\,12'',5$

$2x = 125^\circ\,14'\,25''$

Calcul de $\log \sin 2x$.

$2x = 125^\circ\,14'\,25''$

$180^\circ - 2x = 54^\circ\,45'\,35''$

$\Delta = 9$

$54^\circ\,45'$	$\bar{1},91203$
$30''$	4,5
$5''$	0,75

$\log \sin 2x = \bar{1},91208$

Calcul de y.

$\Delta = 33$

$\log \operatorname{tg} y = 0,33338$	
1	$65^\circ\,6'$
7	
5,5	$10''$
1,5	$3''$

$y = 65^\circ\,6'\,13''$

$2y = 130^\circ\,12'\,26''$

$180^\circ - 2y = 49^\circ\,47'\,34''$

Calcul de $\log |\operatorname{tg} 2y|$.

$\Delta = 26$

$49^\circ\,47'$	0,07285
$30''$	13
$4''$	1,73

$\log |\operatorname{tg} 2y| = 0,07300$

Calcul de z.

$\Delta = 27$

$\log |\operatorname{tg} z| = \bar{1},83908$	
3	$34^\circ\,37'$
5	
4,5	$10''$
0,5	$1''$

$180^\circ - z = 34^\circ\,37'\,11''$

$z = 145^\circ\,22'\,49''$

Résultats.

$x = 62^\circ\,37'\,12'',5, \qquad y = 65^\circ\,06'\,13'', \qquad z = 145^\circ\,22'\,49''.$

106. *En désignant par* A *les* $\frac{3}{7}$ *d'un angle droit, calculer, soit en grades, soit en degrés, tous les angles* x *positifs et inférieurs à quatre angles droits qui vérifient l'équation*

$$\operatorname{tg} 3x = \sqrt[3]{\frac{32425 \operatorname{tg} A}{85664 \sin 3A}}.$$

(*École Centrale*, 1910.)

Soit φ le plus petit angle positif qui a pour tangente le second membre de l'équation donnée ; les valeurs de x demandées sont de la forme $\frac{\varphi + k\pi}{3}$, où l'on donne à k les six valeurs 0, 1, 2, 3, 4, 5.

On trouve aisément $\log \operatorname{tg} \varphi = \bar{1},84170$,

puis, en grades, $\varphi = 38^g,6464$,

et, en degrés, $\varphi = 34^\circ\, 46'\, 53''$.

Les valeurs de x sont alors, en grades,

$$x_0 = 12^g,8821, \qquad x_3 = 212^g,8821,$$
$$x_1 = 79^g,5488, \qquad x_4 = 279^g,5488,$$
$$x_2 = 146^g,2155, \qquad x_5 = 346^g,2155,$$

et, en degrés,

$$x_0 = 11^\circ\, 35'\, 38'', \qquad x_3 = 191^\circ\, 35'\, 38'',$$
$$x_1 = 71^\circ\, 35'\, 38'', \qquad x_4 = 251^\circ\, 35'\, 38'',$$
$$x_2 = 131^\circ\, 35'\, 38'', \qquad x_5 = 311^\circ\, 35'\, 38''.$$

107. *Calculer, soit en grades, soit en degrés, trois angles aigus positifs, x, y, z, vérifiant les équations*

$$\sin x = \sqrt{\frac{42538}{86864}}, \qquad \cos y = \frac{45286}{63435}, \qquad \operatorname{tg} 2z = \frac{\sin 3x}{\sin 3y}.$$

(*École Centrale*, 1909.)

On trouve

en grades :	en degrés :
$x = 49^g,3443$,	$x = 44^\circ\, 24'\, 37''$,
$y = 49^g,3850$,	$y = 44^\circ\, 26'\, 46''$,
$z = 25^g,0286$,	$z = 22^\circ\, 28'\, 31''$.

108. *Calculer les arcs compris entre* 180° *et* 360° *qui vérifient la formule*

$$\cot (2x + 45^\circ) = \frac{\sqrt{\sin 3\alpha}}{a^3 \cos \frac{\beta}{2}}.$$

$$a = 0,586047, \qquad \alpha = 41^\circ\, 53'\, 12'', \qquad \beta = 243^\circ\, 53'\, 23''.$$

(*École Centrale*, 1903.)

Comme les angles α, β sont donnés en degrés, nous ferons le calcul en degrés.

On a
$$3\alpha = 125^\circ\, 39'\, 36'',$$
$$\frac{\beta}{2} = 121^\circ\, 56'\, 41'',5\,;$$

on en conclut que $\sin 3\alpha$ est positif et $\cos\frac{\beta}{2}$ négatif. En remplaçant ces angles par leurs suppléments,

$$\gamma = 180^\circ - 3\alpha = 54^\circ\, 20'\, 24'',$$
$$\delta = 180^\circ - \frac{\beta}{2} = 58^\circ\, 03'\, 18'',5,$$

nous avons
$$\cot(2x + 45^\circ) = -\frac{\sqrt{\sin\gamma}}{a^3\cos\delta}.$$

Nous déterminerons d'abord un angle φ, compris entre 0 et 90°, tel que l'on ait

(1)
$$\cot\varphi = \frac{\sqrt{\sin\gamma}}{a^3\cos\delta}.$$

Nous aurons alors
$$\cot(2x + 45^\circ) = -\cot\varphi = \cot(-\varphi),$$
et
$$2x + 45^\circ = k \cdot 180^\circ - \varphi,$$

k désignant un nombre entier arbitraire, ou

(2)
$$x = k \cdot 90^\circ - \frac{45^\circ + \varphi}{2},$$

et nous choisirons parmi tous ces angles ceux qui sont compris entre 180° et 360°.

Le problème sera donc résolu par les formules (1) et (2).

Calcul de log sin γ. $\Delta = 9$

$54^\circ\, 20'$	$\bar{1},90978$
$20''$	3
$4''$	0,6
$\log\sin\gamma =$	$\bar{1},90982$

Calcul de log a. $\Delta = 7$

5860	76790
4	2,8
7	0,49
$\log a =$	$\bar{1},76793$
$3\log a =$	$\bar{1},30379$

Calcul de $\log\cos\delta$.

$\Delta = 20$

58° 04′ (*)	$\bar{1},72340$
40″	13,3
1″	0,33
5	0,167
$\log\cos\delta =$	$\bar{1},72354$

Calcul de φ.

$$\frac{1}{2}\log\sin\gamma = \bar{1},95491$$
$$-3\log a' = 0,69621$$
$$-\log\cos\delta = 0,27646$$
$$\log\cot\varphi = 0,92758$$

$\Delta = 10$

89	6° 44′
31	
18,2	10″
12,8	7″

$$\varphi = 6°\,44'\,17''$$
$$45° + \varphi = 51°\,44'\,17''$$
$$\frac{45° + \varphi}{2} = 25°\,52'\,8'',5$$

La formule (2) donne alors

$$x = k\cdot 90° - 25°\,52'\,8'',5.$$

Pour que x soit compris entre 180° et 360°, il faut donner à k les valeurs 3 et 4. On obtient ainsi les deux solutions

$$x = 244°\,07'\,51'',5,$$
$$x = 334°\,07'\,51'',5.$$

Remarque. — On pourrait aussi faire le calcul en grades; pour cela il faudrait commencer par exprimer les angles donnés en grades. Nous allons en donner un exemple dans l'exercice suivant.

109. *Résoudre l'équation*

$$\cos^2\frac{a+x}{2} = \frac{\sqrt[3]{c}\,\sin a\,\mathrm{tg}\,b}{2\,d\,\sin\dfrac{a+b}{2}}.$$

$$a = 75°\,17'\,25'',\qquad c = -0,0975617,$$
$$b = 127°\,15'\,30'',\qquad d = 2,08615.$$

(*École Centrale*, 1898, *1^re^ session.*)

(*) On considère ici δ comme la différence entre 58° 04′ et 41″,5. En retranchant successivement 40″, 1″, 0″,5 de 58° 04′, le logarithme du cosinus augmente.

Calculons les angles a et b en grades. Nous utilisons pour cela les tables de transformation qui existent dans la plupart des tables de logarithmes. Nous obtenons ainsi

75°	83g,33333	127°	141g,11111
17′	0g,31481	15′	0g,27778
25″	0g,00772	30″	0g,00926
	$a = 83^g,6559$		$b = 141^g,3982$.

Nous en tirons $$a + b = 225^g,0541,$$

et $$\frac{a+b}{2} = 112^g,5270.$$

Comme les angles b et $\frac{a+b}{2}$ sont obtus, nous les remplaçons par leurs suppléments, et nous posons, pour simplifier,

$$\beta = 200 - b = 58,6018,$$

$$\gamma = 200 - \frac{a+b}{2} = 87,4730$$

L'équation donnée peut alors s'écrire

$$\cos^2 \frac{a+x}{2} = \frac{\sqrt[3]{-c \sin a \operatorname{tg} \beta}}{2d \sin \gamma}.$$

Nous déterminerons maintenant un angle aigu φ au moyen de la formule

(1) $$\cos^2 \varphi = \frac{\sqrt[3]{-c \sin a \operatorname{tg} \beta}}{2d \sin \gamma};$$

l'équation donnée devient

$$\cos^2 \frac{a+x}{2} = \cos^2 \varphi, \qquad \text{ou} \qquad \cos \frac{a+x}{2} = \pm \cos \varphi.$$

En prenant le signe $+$, nous avons

$$\cos \frac{a+x}{2} = \cos \varphi,$$

(2) $$\frac{a+x}{2} = 400\, k \pm \varphi = 200 \cdot 2k \pm \varphi,$$

et, en prenant le signe —,

$$\cos\frac{a+x}{2} = -\cos\varphi = \cos(200+\varphi),$$

$$(3)\qquad \frac{a+x}{2} = 400\,k \pm (200+\varphi) = 200\,(2\,k \pm 1) \pm \varphi.$$

Les formules (2) et (3) peuvent se ramener à une seule,

$$\frac{a+x}{2} = 200\,\lambda \pm \varphi,$$

λ désignant un nombre entier arbitraire.

Nous en tirons $\qquad x = 400\,\lambda \pm 2\varphi - a,$

d'où les deux groupes de solutions

$$(4)\qquad \begin{cases} x = 400\,\lambda + 2\varphi - a, \\ x = 400\,\lambda - (2\varphi + a). \end{cases}$$

Tout revient donc à calculer φ par la formule (1), puis x par les formules (4).

Calcul de $\log(-c)$. $\Delta = 5$

9756	98927
1	0,5
7	0,35

$\log(-c) = \bar{2},98928$

Calcul de $\log \operatorname{tg}\beta$. $\Delta = 14$

58,60	0,11879
1	1,4
8	1,12

$\log \operatorname{tg}\beta = 0,11882$

Calcul de $\log \sin a$. $\Delta = 1$

83,65	$\bar{1}$,98552
59	0,59

$\log \sin a = \bar{1},98553$

Calcul de $\log d$. $\Delta = 21$

2086	31931
1	2,1
5	1,05

$\log d = 0,31934$

Calcul de $\log \sin \gamma$.

87,47	$\bar{1},99153$	$\Delta = 2$
30	0,6	
$\log \sin \gamma = \bar{1},99154$		

Calcul de φ.

$$\frac{1}{3}\log(-c) = \bar{1},66309$$
$$\log \sin a = \bar{1},98553$$
$$\log \operatorname{tg} \beta = 0,11882$$
$$-\log 2 = \bar{1},69897$$
$$-\log d = \bar{1},68066$$
$$-\log \sin \gamma = 0,00846$$

$$2 \log \cos \varphi = \bar{1},15553$$

$$\log \cos \varphi = \bar{1},57777 \qquad \Delta = 17$$

87	75,30
10	
8,5	5
1,5	9

$$\varphi = 75,3059$$
$$2\varphi = 150,6118$$
$$a = 83,6559$$
$$2\varphi + a = 234,2677$$
$$2\varphi - a = 66,9559$$

Les solutions de l'équation sont alors, en grades,

$$x = 400\,\lambda + 66,9559,$$
$$x = 400\,\lambda - 234,2677.$$

On peut aussi exprimer les résultats en degrés au moyen des tables inverses, on trouve

66^g	$59^\circ\ 24'$	234^g	$210^\circ\ 36'$
95'	$51'\ 18''$	26'	$14'\ 02'',4$
50''	$16'',2$	70''	$22'',68$
9''	$2'',916$	7''	$2'',268$
$66^g,9559$	$60^\circ\ 15'\ 37''$	$234^g,2677$	$210^\circ\ 50'\ 27''$

Et l'on a comme solutions

$$x = \lambda.360^\circ + 60^\circ\ 15'\ 37''.$$
$$x = \lambda.360^\circ - 210^\circ\ 50'\ 27''.$$

110. *Calculer le plus petit des angles positifs qui satisfont à l'équation*

$$\log \sin^2 x = (\log a^3)^2 \operatorname{tg} \alpha,$$

$$\alpha = 146^\circ\, 58'\, 27'', \qquad a = 1{,}24056.$$

(*École Centrale*, 1902.)

En calculant l'angle α en grades, on obtient

$$\alpha = 163^g{,}3046,$$

et en désignant par β le supplément de α, on a

$$\beta = 36^g{,}6954.$$

L'équation donnée peut alors s'écrire

$$\log \sin^2 x = -(\log a^3)^2 \operatorname{tg} \beta.$$

Désignons par φ l'angle du premier quadrant défini par l'équation

$$\log \sin^2 \varphi = -(\log a^3)^2 \operatorname{tg} \beta.$$

L'équation proposée devient

$$\log \sin^2 x = \log \sin^2 \varphi,$$

ou

$$\sin^2 x = \sin^2 \varphi,$$

et

$$x = 200\, k \pm \varphi,$$

k désignant un nombre entier arbitraire.

Nous aurons le plus petit des angles positifs répondant à la question en prenant $x = \varphi$.

L'équation qui donne l'angle φ peut s'écrire

$$-2 \log \sin \varphi = (\log a^3)^2 \operatorname{tg} \beta\,;$$

prenons les logarithmes des deux membres, en remarquant que $\log \sin \varphi$ est négatif, puisque $\sin \varphi$ est plus petit que 1 ; nous avons

$$\log 2 + \log(-\log \sin \varphi) = 2 \log (3 \log a) + \log \operatorname{tg} \beta,$$

ou

$$\log(-\log \sin \varphi) = 2 \log 3 + 2 \log (\log a) + \log \operatorname{tg} \beta - \log 2.$$

$$\log 3 = 0,47712$$
$$2 \log 3 = 0,95424$$

Calcul de $2 \log (\log a)$.

$\Delta = 35$

1240	09342
5	17,5
6	2,1

$$\log a = 0,09362$$
$$\log (\log a) = \bar{2},97137$$
$$2 \log (\log a) = \bar{3},94274$$

Calcul de $\log \operatorname{tg} \beta$.

$\Delta = 15$

36,69	$\bar{1},81287$
5	7,5
4	0,6

$$\log \operatorname{tg} \beta = \bar{1},81295$$

Calcul de φ.

$$2 \log 3 = 0,95424$$
$$2 \log (\log a) = \bar{3},94274$$
$$\log \operatorname{tg} \beta = \bar{1},81295$$
$$-\log 2 = \bar{1},69897$$

$$\log(-\log \sin \varphi) = \bar{2},40890$$

$\Delta = 17$

75	2563
15	9

$$-\log \sin \varphi = 0,02564$$
$$\log \sin \varphi = \bar{1},97436$$

$$\varphi = 78^g,3400$$

ou, en degrés,

$$\varphi = 70^\circ\, 30'\, 21''$$

Réponse.

$$x = 78^g,3400,$$

ou

$$x = 70^\circ\, 30'\, 21''.$$

111. *Calculer les arcs x, compris entre 0° et 180°, qui vérifient l'équation*

$$\cos^3(5x - 2\alpha) = \frac{\sqrt[5]{m^3} \cot \frac{\beta}{3}}{\sin \frac{2\gamma}{5}}.$$

Données :

$$\alpha = 44^\circ\ 2'\ 43'',5, \qquad \beta = 131^\circ\ 17'\ 25'',2,$$
$$\gamma = 278^\circ\ 34'\ 13'',5, \qquad m = -0,069175.$$

(*Emploi des tables à cinq décimales au moins. Le résultat pourra être exprimé en degrés ou en grades.*)

(*École Centrale*, 1907.)

Comme le deuxième membre de l'équation donnée est négatif, on calculera d'abord un angle φ au moyen de la formule

$$\cos^3\varphi = -\frac{\sqrt[5]{m^3}\cot\frac{\beta}{3}}{\sin\frac{2\gamma}{5}},$$

et on aura

$$\cos(5x - 2\alpha) = -\cos\varphi = \cos(180^\circ - \varphi)$$

ou $$5x - 2\alpha = k.\,360^\circ \pm (180^\circ - \varphi)$$

ou encore $$x = k.\,72^\circ + 36^\circ + \frac{2\alpha - \varphi}{5},$$

$$x = k'.\,72^\circ - 36^\circ + \frac{2\alpha + \varphi}{5}.$$

On trouve aisément $\varphi = 52^\circ\,29'$.

Pour obtenir les valeurs de x comprises entre 0 et 180°, il faut donner à k les valeurs 0 et 1 et à k' les valeurs 1 et 2.

On obtient ainsi les quatre solutions :

$$x_1 = 43^\circ\,7'\,17'',4, \qquad x_2 = 115^\circ\,7'\,17'',4,$$

$$x_3 = 64^\circ\,6'\,53'',4, \qquad x_4 = 136^\circ\,6'\,53'',4.$$

On peut aussi transformer les angles donnés en grades et faire le calcul avec la division centésimale.

On trouve ainsi

$$\alpha = 48^g,9394, \qquad \beta = 145^g,8781, \qquad \gamma = 309^g,5227,$$

puis $$\varphi = 58^g,3150,$$

et enfin

$$x_1 = 47^g,9127, \qquad x_2 = 127^g,9127,$$

$$x_3 = 71^g,2386, \qquad x_4 = 151^g,2386.$$

112. *Calculer les angles positifs inférieurs à 360° qui vérifient la formule*

$$a^{\sin x} = \frac{\sqrt[3]{b^2}}{\cos C}.$$

Données numériques :

$$a = 72{,}531, \qquad b = 0{,}13648, \qquad C = 340^\circ\, 27'\, 38'',5.$$

(*École Centrale,* 1905.)

De la formule donnée on déduit

$$\sin x \log a = \frac{2}{3} \log b - \log \cos C,$$

et

$$\sin x = \frac{\frac{2}{3} \log b - \log \cos C}{\log a}.$$

On trouve aisément

$$\log a = 1{,}86053, \qquad \log b = \overline{1}{,}13507,$$

$$\frac{2}{3} \log b = \overline{1}{,}42338, \qquad \log \cos C = \overline{1}{,}97424,$$

et

$$\sin x = -\frac{0{,}55086}{1{,}86053}.$$

On en déduit

$$\log |\sin x| = \overline{1}{,}47140,$$

et en désignant par α l'angle aigu dont le sinus est égal à $|\sin x|$,

on a

$$\alpha = 17^\circ\, 13'\, 19''.$$

On a alors

$$\sin x = \sin(-\alpha),$$

$$x = 2k.180^\circ - \alpha, \qquad x = (2k+1)180^\circ + \alpha.$$

Pour avoir les angles compris entre 0 et 360°, il faut prendre $k = 1$ dans la première formule et $k = 0$ dans la seconde. On a les deux solutions

$$x_1 = 342^\circ\, 46'\, 41'', \qquad x_2 = 197^\circ\, 13'\, 19''.$$

113. *Résoudre l'équation*

$$\operatorname{tg}^3 \frac{a+x}{3} = \frac{c \cos \frac{a-b}{2}}{\sqrt{2^7} \cos a \cos b \cos \frac{a+b}{2}};$$

$$c = -3{,}06152, \qquad a = 77^\circ\, 18'\, 53'', \qquad b = 165^\circ\, 22'\, 17''.$$

(*École Centrale*, 1898, 2^e^ *session.*)

On calculera un angle φ, compris entre 0 et 90°, et vérifiant l'équation

$$\operatorname{tg}^3 \varphi = \frac{(-c) \cos \frac{b-a}{2}}{\sqrt{2^7} \cos a \cos (180^\circ - b) \cos \left(180^\circ - \frac{a+b}{2}\right)},$$

ou

$$3 \log \operatorname{tg} \varphi = \log(-c) + \log \cos \frac{b-a}{2} - \frac{7}{2} \log 2 - \log \cos a$$
$$- \log \cos (180^\circ - b) - \log \cos \left(180^\circ - \frac{a+b}{2}\right).$$

On trouvera

$$\log \operatorname{tg} \varphi = 0{,}08187, \qquad \varphi = 50^\circ\, 22'\, 07''.$$

L'expression générale des valeurs de x est alors

$$x = 3k.\, 180^\circ - (3\varphi + a),$$

ou

$$x = 3k.\, 180^\circ - 228^\circ\, 25'\, 14''.$$

114. *Calculer le plus petit arc positif x vérifiant la formule*

$$\cot \frac{x}{4} = a^{-\frac{2}{3}} \cos^3 \alpha \sin^{\frac{1}{2}} 4\beta.$$

$$a = -0{,}000653814, \qquad \alpha = 98^\circ\, 02'\, 31'', \qquad \beta = 34^\circ\, 51'\, 42''.$$

(*École Centrale*, 1899, 2^e^ *session.*)

L'équation proposée peut s'écrire

$$\cot \frac{x}{4} = -(-a)^{-\frac{2}{3}} \sin^3 (\alpha - 90^\circ) \sin^{\frac{1}{2}} (180^\circ - 4\beta).$$

On calculera un angle φ, compris entre 0 et 90°, et vérifiant l'égalité

$$\cot\varphi = (-a)^{-\frac{2}{3}} \sin^3(\alpha - 90°) \sin^{\frac{1}{2}}(180° - 4\beta)\,;$$

on trouvera $$\varphi = 73°\,39'\,56''.$$

On a alors $$\cot\frac{x}{4} = -\cot\varphi = \cot(-\varphi),$$

ou $$\frac{x}{4} = k.\,180° - \varphi,$$

et $$x = 4\,k.\,180° - 4\varphi.$$

On aura le plus petit arc positif en prenant $k = 1$; on obtient ainsi $$x = 425°\,20'\,16''.$$

115. *Calculer l'angle* φ, *compris entre* 90° *et* 180°, *qui vérifie l'équation*

$$\frac{(1+\cos\varphi)^5 - (1-\cos\varphi)^5}{(1+\cos\varphi)^3 - (1-\cos\varphi)^3} = 2.$$

(*École de Physique et chimie industrielles de Paris*, 1911.)

Réponse : $\varphi = 110°\,32'\,25''$.

116. *Calculer les angles positifs, inférieurs à* 180°, *qui vérifient la formule*

$$\cos 3x = \frac{a^{\frac{1}{3}}\operatorname{tg}\dfrac{\alpha}{2}}{\sin 5\beta}.$$

$$a = 0{,}0752483, \qquad \alpha = 87°\,31'\,25'', \qquad \beta = 64°\,12'\,39''.$$

(*École Centrale*, 1899, *1re session.*)

On trouve, en grades, les trois solutions

$$48^{\text{g}}{,}1600, \qquad 85^{\text{g}}{,}1733, \qquad 181^{\text{g}}{,}4933.$$

117. *Calculer les arcs positifs, inférieurs à* 360°, *qui vérifient la formule*

$$\cos^3 \frac{2x}{5} = \frac{\sqrt[3]{a}\,\operatorname{tg}^2 \alpha}{\sin \beta \cot^3 \gamma},$$

où $a = 0{,}087814,\qquad \alpha = 23^\circ\, 42'\, 54'',$

$\beta = 131^\circ\, 13'\, 46'',\qquad \gamma = 125^\circ\, 26'\, 39''.$

(*École Centrale*, 1901, *1re* *session.*)

On a une seule solution

$$x = 332^\circ\, 21'\, 15''.$$

118. *Trouver les angles compris entre* 0 *et* 180° *satisfaisant à l'équation*

$$\sin \frac{4}{3} x = a^{-1} \cot^3 \alpha \cos^{\frac{1}{2}} 2\beta.$$

$a = 15{,}4188,\qquad \alpha = 136^\circ\, 35'\, 17'',\qquad \beta = 19^\circ\, 42'\, 13''.$

(*École Centrale*, 1900, *1re* *session.*)

Soit α' le supplément de α ; on calculera d'abord l'angle aigu φ au moyen de la formule

$$\sin \varphi = - a^{-1} \cot^3 \alpha' \cos^{\frac{1}{2}} 2\beta,$$

et on aura $$\sin \frac{4}{3} x = - \sin \varphi = \sin(-\varphi),$$

et $$\frac{4}{3} x = k \,.\, 360^\circ - \varphi,$$

$$\frac{4}{3} x = k \,.\, 360^\circ + 180^\circ + \varphi,$$

ou $$x = k \,.\, 270^\circ - \frac{3\varphi}{4},$$

$$x = k \,.\, 270^\circ + 135^\circ + \frac{3\varphi}{4}.$$

On trouve $\varphi = 3^\circ\, 51'\, 39''$, et on a pour x une seule valeur comprise entre 0 et 180° :

$$x = 137^\circ\, 53'\, 44''.$$

119. *Calculer les arcs positifs, inférieurs à 360°, qui vérifient la formule*

$$\sin(x - 60^\circ) = \frac{\sqrt[3]{a^2}\cos 2\alpha}{\operatorname{tg}\frac{\beta}{3}}.$$

$$a = 0{,}371258, \qquad \alpha = 141^\circ\,37'\,43'', \qquad \beta = 104^\circ\,13'\,28''.$$

(*École Centrale*, 1903.)

En faisant le calcul en grades on trouve les deux solutions

$$x = 77^{g}{,}5944, \qquad x = 255^{g}{,}7390.$$

120. *Étant donnés les angles*

$$a = 50^\circ\,29'\,55'', \qquad b = 69^\circ\,42'\,13'', \qquad c = 58^\circ\,00'\,12'',$$

calculer en degrés, minutes et secondes les angles φ *et* x *donnés par les formules*

$$\operatorname{tg}\varphi = \frac{\cos c}{\operatorname{tg} a}, \qquad \sin x = \frac{\sin a}{\cos\varphi}\cos(b - \varphi).$$

On prendra pour φ *et* x *les angles dont les valeurs absolues sont inférieures à* 90°.

(*École Navale*, 1909.)

On trouve

$$\varphi = 23^\circ\,35'\,46'', \qquad x = 35^\circ\,42'\,57''.$$

121. *Calculer la valeur d'un angle aigu, sachant que sa tangente est égale au double de son cosinus.*

(*École Navale*, 1910.)

On trouve $51^\circ 19' 5'' 4$.

122. *Les angles aigus a, b, c, d sont donnés par leurs tangentes*

$$\operatorname{tg} a = \frac{1}{2}, \qquad \operatorname{tg} b = \frac{1}{3}, \qquad \operatorname{tg} c = \sqrt{2}+1, \qquad \operatorname{tg} d = \sqrt{2}-1.$$

Calculer en degrés, minutes et secondes l'angle aigu x donné par la formule

$$\sin x = \frac{\sin(2a+2b-c)}{\sin(2a+2b-d)}.$$

(*École Navale*, 1906.)

Réponse : $x = 24^\circ\, 28'\, 10''$.

123. *Calculer le plus petit des angles positifs qui satisfont à l'équation*

$$\cot x = \frac{\sqrt[3]{a}\cos\alpha}{\sin 5\alpha \operatorname{tg}\beta}.$$

$$\alpha = 131^\circ\, 49'\, 25'', \qquad \beta = 36^\circ\, 43'\, 15'', \qquad a = -0{,}085617.$$

(*École Centrale*, 1904.)

Réponse : $x = 114^\circ\, 16' 34''$.

124. *Calculer les arcs compris entre* 90° *et* 180° *qui vérifient la formule*

$$\operatorname{tg}^2(3x+\alpha) = \frac{\cos^3\beta \operatorname{tg}\gamma}{\sqrt{a^3}}.$$

$$a = 0{,}542853, \qquad \alpha = 72^\circ\, 50'\, 35'',$$
$$\beta = 210^\circ\, 38'\, 24'', \qquad \gamma = 124^\circ\, 17'\, 41''.$$

(*École Centrale*, 1901, 2e *session*.)

On a trois solutions, dont les valeurs en grades sont

$$127^g{,}3904 \qquad 194^g{,}0571, \qquad 151^g{,}9849,$$

et, en degrés,

$$114^\circ\, 39'\, 05'' \qquad 174^\circ\, 39'\, 05'', \qquad 136^\circ\, 47'\, 11''.$$

125. *Donner l'expression générale des angles x qui satisfont à l'équation*

$$\operatorname{tg}^{-1}\frac{x}{2} = \sin^{\frac{1}{4}}\frac{\alpha}{2}\cos^{-\frac{2}{3}}\beta,$$

sachant que α *est le plus petit des angles positifs tels que*

$$\cot^3\alpha = -0{,}35846,$$

et que

$$\beta = 132^\circ\,25'\,21''.$$

(*École Centrale,* 1900, 2*e* *session.*)

On trouve, en grades, $x = 400\,k + 85^g{,}3058.$

126. *Calculer, au moyen des tables de logarithmes, les plus petits angles positifs* a, b, c, A, B *vérifiant les équations*

$$\operatorname{tg} a = \sqrt{\frac{35435}{58244}}, \qquad \operatorname{tg} b = \sqrt{\frac{42382}{63425}},$$

$$\cos c = \cos a \cos b, \qquad \operatorname{tg} A = \frac{\operatorname{tg} a}{\sin b}, \qquad \operatorname{tg} B = \frac{\operatorname{tg} b}{\sin a}.$$

(*École Centrale,* 1919.)

Résultats.

$$a = 42^g{,}1707, \qquad b = 43^g{,}6271, \qquad c = 58^g{,}1944,$$

$$A = 56^g{,}6036, \qquad B = 58^g{,}9364.$$

127. *Rendre calculables par logarithmes les racines d'une équation du deuxième degré.*

Soit l'équation $x^2 + px + q = 0$;

nous supposons qu'elle a ses racines réelles, c'est-à-dire que $\frac{p^2}{4} - q$ est positif. Ces racines sont alors

$$-\frac{p}{2} \pm \sqrt{\frac{p^2}{4} - q}, \qquad \text{ou} \qquad -\frac{p}{2}\left(1 \pm \sqrt{1 - \frac{4q}{p^2}}\right).$$

Premier cas. — Supposons $q > 0$.

On commence par déterminer un angle aigu φ vérifiant l'égalité

$$\sin^2\varphi = \frac{4q}{p^2},$$

ou

$$\sin\varphi = \frac{2\sqrt{q}}{|p|}, \tag{1}$$

$|p|$ désignant selon l'usage la valeur absolue de p

Les valeurs des racines deviennent alors

$$-\frac{p}{2}(1 \pm \cos\varphi),$$

ou, en prenant successivement le signe — et le signe $+$,

$$x' = -p\sin^2\frac{\varphi}{2}, \qquad x'' = -p\cos^2\frac{\varphi}{2}.$$

Ces expressions sont calculables par logarithmes, mais on peut les simplifier.

En effet, de la relation (1) on tire

$$|p| = \frac{2\sqrt{q}}{\sin\varphi}, \qquad \text{ou} \qquad p = \varepsilon\frac{2\sqrt{q}}{\sin\varphi},$$

ε étant égal à ± 1 et ayant le signe de p.

Remplaçons p par cette valeur dans les valeurs de x' et x'', nous obtenons aisément

$$x' = -\varepsilon\sqrt{q}\,\mathrm{tg}\frac{\varphi}{2}, \qquad x'' = -\varepsilon\sqrt{q}\cot\frac{\varphi}{2}. \tag{2}$$

En résumé, on détermine φ par la formule (1) et on calcule x' et x'' par les relations (2).

Deuxième cas. — Soit maintenant $q < 0$.

On détermine un angle aigu φ par l'égalité

$$\mathrm{tg}^2\varphi = -\frac{4q}{p^2},$$

ou

$$\mathrm{tg}\,\varphi = \frac{2\sqrt{-q}}{|p|} \tag{3}$$

Les racines sont alors

$$-\frac{p}{2}\left(1 \pm \sqrt{1+\operatorname{tg}^2\varphi}\right) \qquad \text{ou} \qquad -\frac{p}{2}\left(1 \pm \frac{1}{\cos\varphi}\right),$$

ou encore

$$-\frac{p}{2}\cdot\frac{\cos\varphi \pm 1}{\cos\varphi}.$$

En prenant successivement le signe — et le signe +, on obtient

$$x' = p\,\frac{\sin^2\frac{\varphi}{2}}{\cos\varphi}, \qquad x'' = -p\,\frac{\cos^2\frac{\varphi}{2}}{\cos\varphi}.$$

D'autre part, de la formule (3) on déduit

$$p = 2\varepsilon\,\frac{\sqrt{-q}}{\operatorname{tg}\varphi},$$

ε étant égal à ± 1 et ayant le signe de p.

Remplaçons p par cette valeur dans les expressions de x' et x'', nous obtenons

$$(4) \qquad x' = \varepsilon\sqrt{-q}\,\operatorname{tg}\frac{\varphi}{2}, \qquad x'' = -\varepsilon\sqrt{-q}\,\cot\frac{\varphi}{2}.$$

Après avoir calculé φ par la formule (3), on calculera x' et x'' au moyen des relations (4).

Remarque. — Des relations (2) et (4) on tire immédiatement $x'x'' = q$.

Comme vérification du calcul, on calculera $x' + x''$, et cette somme devra être égale à $-p$.

128. *Calculer par logarithmes les racines de l'équation*

$$2584x^2 - 6718x + 428 = 0.$$

Nous avons ici

$$p = -\frac{6718}{2584}, \qquad q = \frac{428}{2584}.$$

Comme q est positif et p négatif ($\varepsilon = -1$), nous nous servons des formules

$$\sin \varphi = \frac{2\sqrt{q}}{|p|},$$

$$x' = \sqrt{q}\,\mathrm{tg}\,\frac{\varphi}{2}, \qquad x'' = \sqrt{q}\,\cot\frac{\varphi}{2}.$$

Calcul de $\log |p|$.

$$\begin{array}{rl} \log 6718 = & 3,82724 \\ -\log 2584 = & \bar{4},58771 \\ \hline \log |p| = & 0,41495 \end{array}$$

Calcul de $\log q$.

$$\begin{array}{rl} \log 428 = & 2,63144 \\ -\log 2584 = & \bar{4},58771 \\ \hline \log q = & \bar{1},21915 \end{array}$$

Calcul de φ.

$$\begin{array}{rlll} \log 2 = & 0,30103 & & \\ \frac{1}{2}\log q = & \bar{1},60957 & & \\ -\log |p| = & \bar{1},58505 & & \Delta = 21 \\ \hline \log \sin\varphi = & \bar{1},49565 & & \\ & \quad 1 & 20^{g},27 & \\ & \quad \overline{4} & & \\ & \quad 2,1 & 1 & \\ & \quad \overline{1,9} & 9 & \end{array}$$

$$\varphi = 20^{g},2719$$

$$\frac{\varphi}{2} = 10^{g},1359$$

Calcul de $\log \mathrm{tg}\,\frac{\varphi}{2}$.

$$\Delta = 4$$

$$\begin{array}{rr} 10,13 & \bar{1},20542 \\ 5 & 21,5 \\ 9 & 3,87 \\ \hline \end{array}$$

$$\log \mathrm{tg}\,\frac{\varphi}{2} = \bar{1},20567$$

Calcul de x'.

$$\begin{array}{rlll} \frac{1}{2}\log q = & \bar{1},60957 & & \\ \log \mathrm{tg}\,\frac{\varphi}{2} = & \bar{1},20567 & & \Delta = \\ \hline \log x' = & \bar{2},81524 & & \\ & \quad 18 & 6534 & \\ & \quad \overline{6} & & \\ & \quad 5,6 & 8 & \\ & \quad \overline{0,4} & 6 & \end{array}$$

$$x' = 0,0653486$$

Calcul de x''.

$$\frac{1}{2}\log q = \bar{1},60957$$
$$\log\cot\frac{\varphi}{2} = 0,79433$$
$$\log x'' = 0,40390 \qquad \Delta = 17$$

81	2534	
9		
8,5	5	
0,5		3

$$x'' = 2,53453$$

Vérification.

$$x' = 0,06535$$
$$x'' = 2,53453$$
$$x' + x'' = 2,59988$$

Calcul de p.

$$\log|p| = 0,41495 \qquad \Delta = 16$$

81	2599	
14		
12,8	8	
1,2		8

$$|p| = 2,59988$$

Réponse.

$$x' = 0,06535, \qquad x'' = 2,53453.$$

129. *Calculer par logarithmes les racines de l'équation*

$$x^2\cos\alpha + x\,\mathrm{tg}\,\beta - \sin\gamma = 0,$$

en supposant

$$\alpha = 27^{g},7561, \qquad \beta = 15^{g},2403, \qquad \gamma = 58^{g},9544.$$

Nous avons ici

$$p = \frac{\mathrm{tg}\,\beta}{\cos\alpha}, \qquad q = -\frac{\sin\gamma}{\cos\alpha}.$$

Comme q est négatif et p positif ($\varepsilon = +1$), nous utiliserons les formules

$$\mathrm{tg}\,\varphi = \frac{2\sqrt{-q}}{|p|},$$

$$x' = \sqrt{-q}\,\mathrm{tg}\,\frac{\varphi}{2}, \qquad x'' = -\sqrt{-q}\cot\frac{\varphi}{2},$$

ou, en remplaçant p et q par leurs valeurs,

$$\mathrm{tg}\,\varphi = \frac{2\sqrt{\sin\gamma\cos\alpha}}{\mathrm{tg}\,\beta},$$

$$x' = \sqrt{\frac{\sin\gamma}{\cos\alpha}}\,\mathrm{tg}\,\frac{\varphi}{2}, \qquad x'' = -\sqrt{\frac{\sin\gamma}{\cos\alpha}}\cot\frac{\varphi}{2}.$$

Calcul de log cos α.

$\Delta = 3$

$$\begin{array}{ll} 27,76 & \bar{1},95733 \\ \quad 3 & \quad 0,9 \\ \quad 9 & \quad 0,27 \\ \hline \end{array}$$

$\log \cos \alpha = \bar{1},95734$

Calcul de log tg β.

$\Delta = 30$

$$\begin{array}{ll} 15,24 & \bar{1},38751 \\ \quad 03 & \quad 0,9 \\ \hline \end{array}$$

$\log \operatorname{tg} \beta = \bar{1},38752$

Calcul de log sin γ.

$\Delta = 5$

$$\begin{array}{ll} 58,95 & \bar{1},90266 \\ \quad 4 & \quad 2 \\ \quad 4 & \quad 0,2 \\ \hline \end{array}$$

$\log \sin \gamma = \bar{1},90268$

Calcul de φ.

$$\log 2 = 0,30103$$
$$\frac{1}{2} \log \sin \gamma = \bar{1},95134$$
$$\frac{1}{2} \log \cos \alpha = \bar{1},97867$$
$$- \log \operatorname{tg} \beta = 0,61248$$

$\Delta = 49$

$$\begin{array}{lll} \log \operatorname{tg} \varphi = 0,84352 & & \\ & 32 & 90,93 \\ & \overline{20} & \\ & 19,6 & 4 \\ & \overline{0,4} & 1 \end{array}$$

$$\varphi = 90,9341$$
$$\frac{\varphi}{2} = 45,4670$$

Calcul de $\log \operatorname{tg} \frac{\varphi}{2}$.

$\Delta = 13$

$$\begin{array}{ll} 45,46 & \bar{1},93785 \\ \quad 70 & \quad 9,1 \\ \hline \end{array}$$

$\log \operatorname{tg} \frac{\varphi}{2} = \bar{1},93794$

Calcul de x'.

$$\frac{1}{2} \log \sin \gamma = \bar{1},95134$$
$$-\frac{1}{2} \log \cos \alpha = 0,02133$$
$$\log \operatorname{tg} \frac{\varphi}{2} = \bar{1},93794$$

$\Delta = 5$

$$\begin{array}{lll} \log x' = \bar{1},91061 & & \\ & 57 & 8139 \\ & \overline{4} & 8 \end{array}$$

$$x' = 0,81398$$

Calcul de x''.

$$\frac{1}{2} \log \sin \gamma = \bar{1},95134$$
$$-\frac{1}{2} \log \cos \alpha = 0,02133$$
$$\log \cot \frac{\varphi}{2} = 0,06206$$

$\Delta = 40$

$$\begin{array}{lll} \log |x''| = 0,03473 & & \\ & 63 & 1083 \\ & \overline{10} & 25 \end{array}$$

$$x'' = -1,08325$$

Vérification.

$$\begin{array}{r}
x' = \quad 0,81398 \\
x'' = -1,08325 \\
\hline
x' + x'' = -0,26927
\end{array}$$

Calcul de p.

$$\begin{array}{rl}
\log \operatorname{tg} \beta = \bar{1},38752 & \\
-\log \cos \alpha = 0,04266 & \\
\hline
\log p = \bar{1},43018 & \Delta = 16 \\
08 & 2692 \\
\overline{10} & \quad 6 \\
p = 0,26926. &
\end{array}$$

Résultats.

$$x' = 0,81398, \qquad x'' = -1,08325.$$

130. *Calculer la racine positive de l'équation*

$$x^4 + \pi x^2 - 7,6 = 0.$$

(Voir ex. 60.)

On utilisera les formules

$$\operatorname{tg} \varphi = \frac{2\sqrt{7,6}}{\pi}, \qquad x = \sqrt{\sqrt{7,6} \operatorname{tg} \frac{\varphi}{2}}.$$

On trouve

$$\varphi = 67^g,0293, \qquad \log \operatorname{tg} \frac{\varphi}{2} = \bar{1},76429,$$

$$\log x = 0,10235, \qquad x = 1,26576.$$

131. *Résoudre l'équation*

$$a \cos x + b \sin x = c,$$

dans laquelle on a

$$a = 48578, \qquad b = 62801, \qquad c = 54375.$$

Première méthode. — On détermine d'abord l'angle φ, compris entre 0 et 100 grades, au moyen de la formule

$$(1) \qquad \operatorname{tg} \varphi = \frac{a}{b}.$$

L'équation proposée devient alors

$$\sin(x + \varphi) = \frac{c \cos \varphi}{b}.$$

Il existe alors un angle α, compris entre 0 et 100 grades, tel que l'on ait

$$(2) \qquad \sin \alpha = \frac{c \cos \varphi}{b}.$$

On en déduit $\quad \sin(x + \varphi) = \sin \alpha,$

et

$$\begin{cases} x + \varphi = 400\, k + \alpha, \\ x + \varphi = 400\, k + 200 - \alpha\,; \end{cases}$$

on a ainsi deux séries de solutions

$$(3) \qquad \begin{cases} x_1 = 400\, k + \alpha - \varphi, \\ x_2 = 400\, k + 200 - \alpha - \varphi\,; \end{cases}$$

k désigne un nombre entier arbitraire, positif, négatif ou nul.

Le problème est résolu par les équations (1), (2) et (3).

Calcul de $\log a$. $\qquad \Delta = 9$

$$\begin{array}{rr} 4857 & 68637 \\ 8 & 7{,}2 \\ \hline \end{array}$$

$$\log a = 4{,}68644$$

Calcul de $\log b$. $\qquad \Delta = 7$

$$\begin{array}{rr} 6280 & 79796 \\ 1 & 0{,}7 \\ \hline \end{array}$$

$$\log b = 4{,}79797$$

Calcul de $\log c$. $\qquad \Delta = 8$

$$\begin{array}{rr} 5437 & 73536 \\ 5 & 4 \\ \hline \end{array}$$

$$\log c = 4{,}73540$$

Calcul de φ.

$$\begin{array}{r} \log a = 4{,}68644 \\ -\log b = \bar{5}{,}20203 \\ \hline \log \operatorname{tg} \varphi = \bar{1}{,}88847 \end{array} \qquad \Delta = 15$$

$$\begin{array}{rr} 1 & 41{,}91 \\ 6 & 4 \end{array}$$

$$\varphi = 41{,}9140$$

Calcul de $\log \cos \varphi$. $\qquad \Delta = 5$

$$\begin{array}{rr} 41{,}92 & \bar{1}{,}89814 \\ 60 & 3 \\ \hline \end{array}$$

$$\log \cos \varphi = \bar{1}{,}89817$$

Calcul de α.

$$\log c = 4{,}73540$$
$$\log\cos\varphi = \bar{1}{,}89817$$
$$-\log b = \bar{5}{,}20203$$
$$\log\sin\alpha = \bar{1}{,}83560 \qquad \Delta = 7$$

55	48,02	
5		
4,9	7	
0,1	1	

$$\alpha = 48{,}0271$$

$$\alpha = 48{,}0271$$
$$\varphi = 41{,}9140$$
$$\alpha + \varphi = 89{,}9411$$
$$\alpha - \varphi = 6{,}1131$$
$$200 - (\alpha + \varphi) = 110{,}0589$$

Résultats.

$$x_1 = 400k + 6{,}1131,$$
$$x_2 = 400k + 110{,}0589.$$

Deuxième méthode. — On prend comme inconnue $\operatorname{tg}\frac{x}{2} = u$; l'équation devient alors

$$(c + a)u^2 - 2bu + c - a = 0.$$

On calcule par logarithmes les racines de cette équation (127), et des valeurs de $\log u$ on déduit celles de x.

Cette méthode est beaucoup plus longue que la première ; elle peut servir de vérification.

On a

$$c + a = 102953, \qquad 2b = 125602, \qquad c - a = 5797.$$

$$p = -\frac{2b}{c+a}, \qquad q = \frac{c-a}{c+a},$$

$$\sin\varphi = \frac{2\sqrt{q}}{|p|},$$

$$u_1 = \sqrt{q}\,\operatorname{tg}\frac{\varphi}{2}, \qquad u_2 = \sqrt{q}\,\cot\frac{\varphi}{2}.$$

On détermine les angles θ_1 et θ_2 au moyen des formules

$$\operatorname{tg}\theta_1 = u_1, \qquad \operatorname{tg}\theta_2 = u_2.$$

On a alors

$$\frac{x_1}{2} = 200\,k + \theta_1, \qquad \frac{x_2}{2} = 200\,k + \theta_2,$$

ou

$$x_1 = 400\,k + 2\,\theta_1 \qquad x_2 = 400\,k + 2\theta_2.$$

Calcul de $\log(c + a)$.

$\Delta = 42$

1029	01242
5	21
3	1,26

$\log(c + a) = 5,01264$

Calcul de $\log 2b$.

$\Delta = 35$

1256	09899
02	0,7

$\log 2b = 5,09900$

Calcul de $\log |p|$.

$$\begin{aligned} \log 2b &= 5,09900 \\ -\log(c + a) &= \bar{6},98736 \\ \hline \log |p| &= 0,08636 \end{aligned}$$

Calcul de $\log q$.

$$\begin{aligned} \log(c - a) &= 3,76320 \\ -\log(c + a) &= \bar{6},98736 \\ \hline \log q &= \bar{2},75056 \end{aligned}$$

Calcul de φ.

$$\begin{aligned} \log 2 &= 0,30103 \\ \log\sqrt{q} &= \bar{1},37528 \\ -\log|p| &= \bar{1},91364 \\ \hline \log \sin\varphi &= \bar{1},58995 \end{aligned}$$

$\Delta = 17$

85	25,43
10	
8,5	5
1,5	9

$\varphi = 25,4359$

$\frac{\varphi}{2} = 12,7179$

Calcul de $\log \operatorname{tg}\frac{\varphi}{2}$.

$\Delta = 35$

12,71	$\bar{1}$,30609
7	24,5
9	3,15

$\log \operatorname{tg}\frac{\varphi}{2} = \bar{1},30637$

Calcul de θ_1.

$$\log \sqrt{q} = \bar{1},37528$$
$$\log \operatorname{tg} \frac{\varphi}{2} = \bar{1},30637$$
$$\log \operatorname{tg} \theta_1 = \bar{2},68165$$
$$-\log \frac{\operatorname{tg} \theta_1}{\theta_1} = 3,80355 \qquad \Delta = 15$$
$$\log \theta_1 = 0,48520$$

15	3056
5	3

$$\theta_1 = 3,0563$$
$$2\theta_1 = 6,1126$$

Calcul de θ_2.

$$\log \sqrt{q} = \bar{1},37528$$
$$\log \cot \frac{\varphi}{2} = 0,69363 \qquad \Delta = 14$$
$$\log \operatorname{tg} \theta_2 = 0,06891$$

78	55,02
13	
12,6	9
0,4	3

$$\theta_2 = 55,0293$$
$$2\theta_2 = 110,0586$$

Résultats.

$$x_1 = 400k + 6,1126, \qquad x_2 = 400k + 110,0586.$$

132. *Trouver, entre* 0 *et* 360°, *les arcs* x *satisfaisant à l'équation*

$$\sqrt[5]{\pi}\,\sin^2 x + 2e\pi \sin x \cos x + 2\sqrt[5]{\pi}\,\cos^2 x = \sqrt[5]{e},$$

où $\pi = 3,141592653...$ *et où* e *représente la base des logarithmes népériens*, $e = 2,718281828...$

Toutes les formules auxquelles on sera conduit seront rendues calculables par logarithmes à l'aide d'arcs auxiliaires. Seules les sommes d'arcs seront calculées par addition directe.

(*École des Mines de Saint-Étienne*, 1903.)

L'équation peut aisément se mettre sous la forme

$$\frac{\sqrt[5]{\pi}}{2e\pi}\cos 2x + \sin 2x = -\frac{3\sqrt[5]{\pi}}{2e\pi}\left(1 - \frac{2}{3}\sqrt[5]{\frac{e}{\pi}}\right),$$

ou, en posant

$$\operatorname{tg}\varphi = \frac{\sqrt[5]{\pi}}{2e\pi}, \qquad \sin^2\theta = \frac{2}{3}\sqrt[5]{\frac{e}{\pi}},$$

$$\sin(2x + \varphi) = -3\sin\varphi\cos^2\theta,$$

et, en posant encore

$$\sin \alpha = 3 \sin \varphi \cos^2 \theta,$$

les solutions du problème sont

$$2x + \varphi = 400\, k - \alpha,$$
$$2x + \varphi = 400\, k + 200 + \alpha,$$

ou

$$x = 200\, k - \frac{\alpha + \varphi}{2},$$

$$x = 200\, k + 100 + \frac{\alpha - \varphi}{2},$$

en exprimant les angles en grades.

On obtient successivement

$$\log \operatorname{tg} \varphi = \bar{2},86696, \qquad \varphi = 4^g,6780,$$
$$\log \sin \varphi = \bar{2},86579, \qquad \log \sin \theta = \bar{1},90567,$$
$$\log \cos \theta = \bar{1},77349, \qquad \log \sin \alpha = \bar{2},88989,$$

et

$$\alpha = 4^g,9455.$$

Les solutions comprises entre 0 et 400 grades sont

$$195^g,1883, \qquad 395^g,1883, \qquad 100^g,1337, \qquad 300^g,1337.$$

133. *Trouver par la trigonométrie et les tables de logarithmes les valeurs de l'angle x vérifiant l'équation*

$$3 \cos x + 2 \sin x = 1.$$

(*École des Ponts et Chaussées, Cours préparatoires*, 1907.)

On trouve les deux séries de solutions

$$x_1 = 400\, k - 44^g,6755,$$
$$x_2 = 400\, k + 119^g,5421.$$

134. *Calculer les arcs x et y inférieurs à un quadrant, satisfaisant aux relations*

$$\sin 11^\circ 57' 20'' = \sin x \cos 93^\circ 34' 19'' + \cos x \sin 93^\circ 34' 19'' \cos 71^\circ 12'$$

$$\operatorname{tg}\frac{y}{2} = \sqrt{\frac{2-\sqrt{3}}{2+\sqrt{3}}}\operatorname{tg}\frac{x}{2}.$$

On exprimera x et y en degrés, minutes et secondes.

(*École Navale,* 1906.)

On trouve $x = 39^\circ 49' 3''$, $y = 11^\circ 5' 8''$.

135. *Résoudre l'équation*

$$\cos 2x + \cos x - 1 = \sin\frac{3x}{2},$$

et calculer les racines à une seconde centésimale près.

On prendra comme inconnue $\sin\frac{x}{2}$.

On obtient les cinq séries de solutions suivantes, l'unité étant le grade, et k désignant un nombre entier arbitraire, positif, négatif ou nul :

$$x = (4k+1)\,200,$$
$$x = \left(4k - \frac{1}{3}\right)200,$$
$$x = \left(4k + 2 + \frac{1}{3}\right)200,$$
$$x = 800k + 26{,}5618,$$
$$x = 800k + 373{,}4382.$$

CHAPITRE V

RÉSOLUTION DES TRIANGLES

136. *Dans un triangle* ABC *on donne*

$$a = 11925^{\text{m}},30, \qquad A = 119^\circ\, 37'\, 08'', \qquad B = 35^\circ\, 22'\, 31''.$$

On demande de calculer :

1° *les côtés b et c en centimètres ;*

2° *la surface en mètres carrés ;*

3° *le rayon du cercle inscrit en centimètres.*

(*École des Mines de Saint-Étienne*, 1901.)

On utilisera les formules

$$C = 180^\circ - (A + B), \qquad b = \frac{a \sin B}{\sin A}, \qquad c = \frac{a \sin C}{\sin A},$$

$$S = \frac{1}{2}\, bc \sin A, \qquad r = \frac{S}{p}.$$

Calcul de C.

$$\begin{array}{rl} A = & 119^\circ\, 37'\, 08'' \\ B = & 35^\circ\, 22'\, 31'' \\ \hline A + B = & 154^\circ\, 59'\, 39'' \\ C = & 25^\circ\, 0'\, 21'' \end{array}$$

Calcul de log a.

$\Delta = 36$

$$\begin{array}{lr} 1192 & 07628 \\ \quad 5 & 18 \\ \quad 3 & 1{,}08 \\ \hline \multicolumn{2}{l}{\log a = 4{,}07647} \end{array}$$

Calcul de log sin A.

$$180^\circ - A = 60^\circ\, 22'\, 52''$$

$\Delta = 8$

$$\begin{array}{lr} 60^\circ\, 22' & \bar{1}{,}93912 \\ \quad 50'' & 6{,}7 \\ \quad 2'' & 0{,}27 \\ \hline \multicolumn{2}{l}{\log \sin A = \bar{1}{,}93919} \end{array}$$

Calcul de log sin B.

$\Delta = 18$

$35^\circ\,22'$	$\bar{1},76253$
$30''$	9
$1''$	0,3

$\log \sin B = \bar{1},76262$

Calcul de log sin C.

$\Delta = 27$

$25^\circ\,0'$	$\bar{1},62595$
$20''$	9
$1''$	0,45

$\log \sin C = \bar{1},62604$

Calcul de b.

$$\begin{aligned} \log a &= 4,07647 \\ \log \sin B &= \bar{1},76262 \\ -\log \sin A &= 0,06081 \\ \hline \log b &= 3,89990 \end{aligned}$$

$\Delta = 5$

88	7941
2	40

$b = 7941,40$

Calcul de c.

$$\begin{aligned} \log a &= 4,07647 \\ \log \sin C &= \bar{1},62604 \\ -\log \sin A &= 0,06081 \\ \hline \log c &= 3,76332 \end{aligned}$$

$\Delta = 7$

28	5798
4	
3,5	5
0,5	7

$c = 5798,57$

Calcul de S.

$$\begin{aligned} \log b &= 3,89990 \\ \log c &= 3,76332 \\ \log \sin A &= \bar{1},93919 \\ -\log 2 &= \bar{1},69897 \\ \hline \log S &= 7,30138 \end{aligned}$$

$\Delta = 21$

25	2001
13	
12,6	6
0,4	2

$S = 20016200$

Calcul de $\log p$.

$$\begin{aligned} a &= 11925,30 \\ b &= 7941,40 \\ c &= 5798,57 \\ \hline 2p &= 25665,27 \\ p &= 12832,63 \end{aligned}$$

$\Delta = 34$

1283	10823
2	6,8
6	2,04
3	0,102

$\log p = 4,10832$

Calcul de r.

$$\begin{aligned} \log S &= 7,30138 \\ -\log p &= \bar{5},89168 \\ \hline \log r &= 3,19306 \end{aligned}$$

$\Delta = 27$

285	1559
21	
18,9	7
2,1	8

$r = 1559,78$

Résultats.

$b = 7941^m,40$, $\quad c = 5798^m,57$,

$S = 200162^a$, $\quad r = 1559^m,78$.

Remarque. — Comme vérification, on pourra faire le calcul en grades, en remarquant que l'on a

$$A = 132^{g},9099, \qquad B = 39^{g},3059.$$

137. *On donne dans un triangle*

$$a = 22579^{m},83, \qquad B = 71^{\circ}\,22'\,34'',5, \qquad C = 39^{\circ}\,51'\,20'',6.$$

Calculer A, b, c, *la surface* S *et la hauteur* h *perpendiculaire au côté* a.

(*École Polytechnique,* 1895.)

Résultats.

$$A = 68^{\circ}\,46'\,04'',9, \qquad b = 22955^{m},8, \qquad c = 15524^{m},3,$$
$$S = 1660880^{a}, \qquad h = 14711^{m},3.$$

138. *On donne dans un triangle*

$$b = 7567^{m},3, \qquad c = 1334^{m},2, \qquad A = 57^{g},5984.$$

Calculer le côté a, *les angles* B *et* C, *l'aire* S *du triangle et le rayon* r_b *du cercle exinscrit tangent au côté* b.

(*École des Mines de Saint-Étienne,* 1907.)

Nous utiliserons les formules

$$\operatorname{tg}\frac{B-C}{2} = \frac{b-c}{b+c}\cdot\frac{1}{\operatorname{tg}\dfrac{A}{2}}, \qquad \frac{B+C}{2} = 100 - \frac{A}{2},$$

$$a = \frac{b\sin A}{\sin B}, \qquad S = \frac{1}{2}\,bc\sin A, \qquad r_b = \frac{S}{p-b},$$

et, comme vérification, nous pourrons calculer a par l'une des formules

$$a = \frac{(b+c)\sin\dfrac{A}{2}}{\cos\dfrac{B-C}{2}}, \qquad a = \frac{(b-c)\cos\dfrac{A}{2}}{\sin\dfrac{B-C}{2}}.$$

$$b = 7567,3$$
$$c = 1334,2$$
$$b+c = 8901,5$$
$$b-c = 6233,1$$

Calcul de $\log(b-c)$.

6233	79470	$\Delta = 7$
1	0,7	
$\log(b-c) = 3,79471$		

Calcul de $\log(b+c)$.

$\Delta = 5$

8901	94944
5	2,5

$\log(b+c) = 3,94947$

Calcul de $\log \operatorname{tg} \frac{A}{2}$.

$$A = 57,5984$$
$$\frac{A}{2} = 28,7992$$

$\Delta = 17$

28,79	$\bar{1},68647$
9	15,3
2	0,34

$\log \operatorname{tg} \frac{A}{2} = \bar{1},68663$

Calcul de B *et* C.

$$\log(b-c) = 3,79471$$
$$-\log(b+c) = \bar{4},05053$$
$$-\log \operatorname{tg} \frac{A}{2} = 0,31337$$

$\Delta = 14$

$\log \operatorname{tg} \frac{B-C}{2} = 0,15861$

54	61,37
7	50

$$\frac{B-C}{2} = 61,3750$$
$$\frac{B+C}{2} = 71,2008$$
$$B = 132,5758$$
$$C = 9,8258$$

Calcul de $\log b$.

$\Delta = 6$

7567	87892
3	1,8

$\log b = 3,87894$

Calcul de $\log \sin A$.

$\Delta = 5$

57,59	$\bar{1},89553$
8	4
4	0,2

$\log \sin A = \bar{1},89557$

Calcul de $\log \sin B$.

$$B = 132,5758$$
$$200 - B = 67,4242$$

$\Delta = 4$

67,42	$\bar{1},94046$
4	1,6
2	0,08

$\log \sin B = \bar{1},94048$

Calcul de a.

$$\log b = 3,87894$$
$$\log \sin A = \bar{1},89557$$
$$-\log \sin B = 0,05952$$

$\log a = 3,83403$

398	6823	$\Delta = 6$
5	8	

$a = 6823,8$

Calcul de $\log c$.

$\Delta = 32$

1334	12516
2	6,4

$\log c = 3,12522$

Calcul de S.

$$\log b = 3,87894$$
$$\log c = 3,12522$$
$$\log \sin A = \bar{1},89557$$
$$-\log 2 = \bar{1},69897 \qquad \Delta = 11$$
$$\log S = 6,59870$$

68	3969
2	
1,1	1
0,9	8

$$S = 3969180$$

Calcul de r_b.

$$a = 6823,8$$
$$b = 7567,3$$
$$c = 1334,2$$
$$2p = 15725,3$$
$$p = 7862,6$$
$$p - b = 295,3$$

$$\log S = 6,59870$$
$$-\log(p-b) = \bar{3},52974 \qquad \Delta = 32$$
$$\log r_b = 4,12844$$

40	1344
4	
3,2	1
0,8	2

$$r_b = 13441,2$$

Vérification.

$$a = \frac{(b+c)\sin\frac{A}{2}}{\cos\frac{B-C}{2}}.$$

Calcul de $\log \sin \frac{A}{2}$.

$\Delta = 14$

28,79	$\bar{1},64046$
9	12,6
2	0,28

$$\log \sin \frac{A}{2} = \bar{1},64059$$

Calcul de $\log \cos \frac{B-C}{2}$.

$\Delta = 10$

61,38	$\bar{1},75596$
50	5

$$\log \cos \frac{B-C}{2} = \bar{1},75601$$

Calcul de $\log a$.

$$\log(b+c) = 3,94947$$
$$\log \sin \frac{A}{2} = \bar{1},64059$$
$$-\log \cos \frac{B-C}{2} = 0,24399$$
$$\log a = 3,83405$$

On voit qu'il y a une différence de deux unités du cinquième ordre entre les valeurs de $\log a$, obtenues de deux manières différentes.

Étant données les erreurs qu'on peut commettre dans le calcul des logarithmes, la vérification peut être considérée comme très suffisante.

Résultats.

$B = 132^g,5758$, $\quad C = 9^g,8258$, $\quad a = 6823^m,8$,
$S = 3969180^{m2}$, $\quad r_b = 13441^m,2$.

139. *Résoudre un triangle* ABC *connaissant les deux côtés* $a = 11^{m},64$, $b = 35^{m},28$ *et la surface* $S = 142^{m^2},32$.

Il existe deux triangles répondant à la question.

(*Saint-Cyr*, 1910.)

On calcule d'abord l'angle C au moyen de la formule

$$S = \frac{ab \sin C}{2},$$

puis on est ramené au cas où l'on connaît deux côtés et l'angle compris. A la valeur de sin C correspondent deux valeurs supplémentaires de C.

Première solution : $C = 48^{g},7528$, $A = 18^{g},5565$,
$B = 132^{g},6907$, $c = 28^{m},07$.

Deuxième solution : $C = 151^{g},2472$, $A = 11^{g},6301$,
$B = 37^{g},1227$, $c = 44^{m},41$.

140. *Dans un triangle* ABC *on connaît les côtés* $a = 39^{m},63$, $b = 57^{m},48$ *et la valeur de* $\cos C = 0,41725$.

Calculer le côté c en mètres et les angles en grades.

(*Saint-Cyr*, 1911.)

Résultats : $A = 45^{g},9283$, $B = 81^{g},4731$,
$C = 72^{g},5986$, $c = 54^{m},53$.

141. *Résoudre un triangle connaissant deux côtés b, c et l'angle compris* A.

Données : $b = 16^{m},423$, $c = 12^{m},608$, $A = 67^{g},27$.

(*Saint-Cyr*, 1907.)

Résultats : $a = 15^{m},001$, $B = 80^{g},4625$,
$C = 52^{g},2675$, $S = 90^{m^2},146$.

142. *Résoudre un triangle connaissant deux côtés et l'angle compris.*

$b = 43\,785$ *mètres*, $c = 27\,963$ *mètres*, $A = 78^{g},6826$.

On trouve

$$B = 79^{g},8087, \qquad C = 41^{g},5087,$$
$$a = 43\,524^{m}, \qquad S = 57819^{ha}.$$

143. *Calculer les angles, les côtés, la surface et le rayon du cercle inscrit du triangle* ABC *dont on connaît*

$$A = 22^{\circ}\,37'\,11'', \qquad b = 217^{m},57, \qquad c = 117^{m},85.$$

(*École des Mines de Saint-Étienne,* 1899.)

144. *Calculer la distance des points* A *et* B *séparés par un obstacle, sachant que les distances de ces points à un troisième point* C *valent*

$$AC = 214^{m},8, \qquad BC = 192^{m},5$$

et que la droite AB *est vue du point* C *sous un angle de* $63^{\circ}\,10'\,27''$.

(*Concours général de Belgique,* 1903.)

145. *Dans un triangle on donne deux côtés*

$$b = 482^{m},76, \qquad c = 674^{m},37,$$

et l'angle compris

$$A = 35^{\circ}\,42'\,12''.$$

Calculer :

1° *le côté* a *et les angles* B *et* C *à l'aide des formules ordinaires*

$$\operatorname{tg}\frac{B-C}{2} = \frac{b-c}{b+c}\cot\frac{A}{2}, \qquad a = \frac{(b+c)\sin\frac{A}{2}}{\cos\frac{B-C}{2}};$$

2° *la longueur de la perpendiculaire abaissée du sommet* A *sur le côté opposé* a ;

3° *la distance du pied de cette perpendiculaire au sommet* C.

(*École Polytechnique,* 1902.)

146. *Dans un triangle on donne deux côtés et l'angle compris, savoir :*

$$b = 548^{m},75, \qquad c = 315^{m},62, \qquad A = 66^{g},6467.$$

1° *Calculer* a, B, C *à l'aide des formules*

$$\operatorname{tg}\frac{B-C}{2} = \frac{b-c}{b+c}\cot\frac{A}{2}, \qquad a = \frac{(b+c)\sin\frac{A}{2}}{\cos\frac{B-C}{2}}.$$

2° *Calculer la surface* S *en hectares.*

3° *Calculer le rayon du cercle inscrit.*

(*École Polytechnique*, 1909.)

147. *Résoudre un triangle connaissant les trois côtés.*

$$a = 401^{m},456, \qquad b = 328^{m},233, \qquad c = 297^{m},315.$$

Calculer les angles et la surface.

(*École des Mines de Paris*, 1912.)

Nous utiliserons les formules connues :

$$a + b + c = 2p, \qquad r = \sqrt{\frac{(p-a)(p-b)(p-c)}{p}},$$

$$\operatorname{tg}\frac{A}{2} = \frac{r}{p-a}, \qquad \operatorname{tg}\frac{B}{2} = \frac{r}{p-b}, \qquad \operatorname{tg}\frac{C}{2} = \frac{r}{p-c}, \qquad S = pr.$$

$$2p = 1027,004$$
$$p = 513,502$$
$$p - a = 112,046$$
$$p - b = 185,269$$
$$p - c = 216,187$$

Calcul de $\log p$. $\Delta = 9$

5135	71054
02	0,18

$\log p = 2,71054$

Calcul de $\log(p-a)$. $\Delta = 39$

1120	04922
4	15,6
6	2,34

$\log(p-a) = 2,04940$

Calcul de $\log(p-b)$. $\Delta = 24$

1852	26764
6	14,4
9	2,16

$\log(p-b) = 2,26781$

Calcul de $\log(p-c)$.

$\Delta = 21$

2161	33465
8	16,8
7	1,47

$\log(p-c) = 2,33483$

Calcul de $\log r$.

$$\begin{aligned}\log(p-a) &= 2,04940\\ \log(p-b) &= 2,26781\\ \log(p-c) &= 2,33483\\ -\log p &= \bar{3},28946\\ \hline 2\log r &= 3,94150\\ \log r &= 1,97075\end{aligned}$$

Calcul de A.

$$\begin{aligned}\log r &= 1,97075\\ -\log(p-a) &= \bar{3},95060\\ \hline \log \operatorname{tg}\frac{A}{2} &= \bar{1},92135\end{aligned}$$

$\Delta = 14$

26	44,26
9	
8,4	6
0,6	4

$$\frac{A}{2} = 44,2664$$

$$A = 88,5328$$

Calcul de B.

$$\begin{aligned}\log r &= 1,97075\\ -\log(p-b) &= \bar{3},73219\\ \hline \log \operatorname{tg}\frac{B}{2} &= \bar{1},70294\\ \frac{B}{2} &= 29,7500\\ B &= 59,5000\end{aligned}$$

Calcul de C.

$$\begin{aligned}\log r &= 1,97075\\ -\log(p-c) &= \bar{3},66517\\ \hline \log \operatorname{tg}\frac{C}{2} &= \bar{1},63592\end{aligned}$$

$\Delta = 19$

85	25,98
7	
5,7	3
1,3	7

$$\frac{C}{2} = 25,9837$$

$$C = 51,9674$$

Calcul de S.

$$\begin{aligned}\log p &= 2,71054\\ \log r &= 1,97075\\ \hline \log S &= 4,68129\end{aligned}$$

$\Delta = 9$

4	4800
5	55

$$S = 48005,5$$

Résultats.

$$\begin{aligned}A &= 88^{g},5328\\ B &= 59^{g},5000\\ C &= 51^{g},9674\\ \hline A+B+C &= 200^{g},0002\end{aligned}$$

$$S = 48005^{m2},5.$$

148. *Résoudre un triangle connaissant les trois côtés:*

$$a = 521^{m},82, \qquad b = 433^{m},09, \qquad c = 472^{m},96.$$

(*Saint-Cyr*, 1908.)

On trouve

$$A = 70^{\circ}\,10'\,18'', \qquad B = 51^{\circ}\,19'\,44'', \qquad C = 58^{\circ}\,29'\,56'',$$

ou $A = 77^{g},9686, \qquad B = 57^{g},0322, \qquad C = 64^{g},9988,$

$$S = 96\,345 \text{ mètres carrés.}$$

149. *Calculer les angles* A, B, C, *d'un triangle dont les côtés vérifient les relations*

$$\frac{a}{6738} = \frac{b}{9321} = \frac{c}{11\,985}.$$

(*Saint-Cyr*, 1909.)

On trouve

$$A = 34^{\circ}\,02'\,56'', \qquad B = 50^{\circ}\,45'\,47'', \qquad C = 95^{\circ}\,11'\,17'',$$

ou $A = 37^{g},8320, \qquad B = 56^{g},4034, \qquad C = 105^{g},7646.$

150. *Résoudre un triangle connaissant les trois côtés:*

$$a = 541^{m},94, \qquad b = 540^{m},19, \qquad c = 491^{m},30.$$

(*Saint-Cyr*, 1906.)

On trouve

$$A = 63^{\circ}\,10'\,52'', \qquad B = 62^{\circ}\,49'\,00'', \qquad C = 54^{\circ}\,0'\,8'',$$

$$S = 118\,424 \text{ mètres carrés.}$$

151. *Résoudre un triangle connaissant les trois côtés:*

$$a = 293^{m},45, \qquad b = 426^{m},63, \qquad c = 543^{m},82.$$

On trouve

$$A = 36^{g},0368, \qquad B = 56^{g},9282, \qquad C = 107^{g},0370,$$

$$S = 62\,215^{m2},7.$$

152. *Résoudre un triangle connaissant les trois côtés :*

$$a = 2834^{m},5, \qquad b = 3971^{m},8, \qquad c = 5023^{m},7.$$

Réponse :

$$A = 38^{g},0775, \qquad B = 57^{g},8812, \qquad C = 104^{g},0400,$$
$$S = 5\,617\,625 \text{ mètres carrés.}$$

153. *Résoudre un triangle connaissant les trois côtés :*

$$a = 287^{m},48, \qquad b = 356^{m},74, \qquad c = 519^{m},08.$$

Réponse :

$$A = 35^{g},5608, \qquad B = 45^{g},6914, \qquad C = 118^{g},7486,$$
$$S = 49\,070 \text{ mètres carrés.}$$

154. *On donne les trois côtés d'un triangle,*

$$a = 25\,648^{m}, \qquad b = 32\,907^{m}, \qquad c = 29\,763^{m}.$$

Calculer les trois angles, la hauteur issue du sommet C *et la surface.*

(*École Polytechnique*, 1896.)

155. *Dans un triangle* ABC *on donne*

$$a = 3645^{m},43, \qquad b = 4156^{m},28, \qquad c = 5047^{m},56.$$

On demande de calculer les angles A, B, C, *la surface* S *et le rayon* r *du cercle inscrit.*

(*École des Mines de Saint-Étienne*, 1900.)

156. *On donne les trois côtés d'un triangle* ABC :

$$a = 25\,645^{m}, \qquad b = 32\,904^{m}, \qquad c = 29\,759^{m}.$$

Calculer les trois angles, la hauteur H *issue du point* C *et la surface* S.

On emploiera les formules

$$r = \sqrt{\frac{(p-a)(p-b)(p-c)}{p}}, \qquad S = pr,$$

$$\operatorname{tg}\frac{A}{2} = \frac{r}{p-a}, \qquad \operatorname{tg}\frac{B}{2} = \frac{r}{p-b}, \qquad \operatorname{tg}\frac{C}{2} = \frac{r}{p-c}$$

(*École Polytechnique,* 1906.)

157. *Dans un triangle dont les trois côtés sont égaux à* 32 *mètres,* 41 *mètres et* 53 *mètres, calculer la surface et le rayon du cercle inscrit.*

(*École des Ponts et Chaussées, cours préparatoires,* 1906.)

158. *On donne dans un triangle les côtés*

$$a = 31^{m},025, \qquad b = 43^{m},468,$$

et l'angle $\qquad A = 38^{g},126.$

Calculer, pour chacune des deux solutions, les angles B, C *en grades, le côté* c *en mètres, la surface* S *en ares.*

(*École des Mines de Saint-Étienne,* 1911.)

Nous utiliserons les formules

$$\sin B = \frac{b \sin A}{a}, \qquad C = 200 - (A + B),$$

$$c = \frac{a \sin C}{\sin A}, \qquad S = \frac{ab \sin C}{2}.$$

Calcul de log *a.* $\Delta = 14$

3102	49164
5	7
$\log a = 1,49171$	

Calcul de log *b.* $\Delta = 10$

4346	63809
8	8
$\log b = 1,63817$	

Calcul de log sin A.

$\Delta = 10$

$$\begin{array}{ll} 38,12 & \bar{1},75100 \\ \quad 6 & \quad 6 \\ \hline \end{array}$$

$\log \sin A = \bar{1},75106$

Calcul de B *et de* C.

$$\begin{aligned} \log b &= 1,63817 \\ \log \sin A &= \bar{1},75106 \\ -\log a &= \bar{2},50829 \\ \hline \log \sin B &= \bar{1},89752 \end{aligned}$$

$\Delta = 5$

$$\begin{array}{ll} 0 & 57,96 \\ \hline 2 & 4 \end{array}$$

$$\begin{aligned} B_1 &= 57,9640 \\ A &= 38,1260 \\ A + B_1 &= 96,0900 \\ C_1 &= 103,9100 \\ B_2 = 200 - B_1 &= 142,0360 \\ A &= 38,1260 \\ A + B_2 &= 180,1620 \\ C_2 &= 19,8380 \end{aligned}$$

Calcul de c_1.

$$\begin{aligned} \log a &= 1,49171 \\ \log \sin C_1 &= \bar{1},99918 \\ -\log \sin A &= 0,24894 \\ \hline \log c_1 &= 1,73983 \end{aligned}$$

$\Delta = 8$

$$\begin{array}{ll} 1 & 5493 \\ \hline 2 & 2 \end{array}$$

$c_1 = 54,932$

Calcul de log sin C_2.

$\Delta = 21$

$$\begin{array}{ll} 19,83 & \bar{1},48640 \\ \quad 80 & \quad 16,8 \\ \hline \end{array}$$

$\log \sin C_2 = \bar{1},48657$

Calcul de c_2.

$$\begin{aligned} \log a &= 1,49171 \\ \log \sin C_2 &= \bar{1},48657 \\ -\log \sin A &= 0,24894 \\ \hline \log c_2 &= 1,22722 \end{aligned}$$

$\Delta = 25$

$$\begin{array}{ll} 12 & 1687 \\ \hline 10 & 4 \end{array}$$

$c_2 = 16,874$

Calcul de S_1.

$$\begin{aligned} \log a &= 1,49171 \\ \log b &= 1,63817 \\ \log \sin C_1 &= \bar{1},99918 \\ -\log 2 &= \bar{1},69897 \\ \hline \log S_1 &= 2,82803 \end{aligned}$$

$\Delta = 6$

$$\begin{array}{ll} 2 & 6730 \\ \hline 1 & 2 \end{array}$$

$S_1 = 673,02$

Calcul de S_2.

$$\begin{aligned} \log a &= 1,49171 \\ \log b &= 1,63817 \\ \log \sin C_2 &= \bar{1},48657 \\ -\log 2 &= \bar{1},69897 \\ \hline \log S_2 &= 2,31542 \end{aligned}$$

$\Delta = 21$

$$\begin{array}{ll} 34 & 2067 \\ \hline 8 & 4 \end{array}$$

$S_2 = 206,74$

Résultats.

Première solution.

$B_1 = 57^g,9460,$
$C_1 = 103^g,9100,$
$c_1 = 54^m,932,$
$S_1 = 6^a,7302,$

Deuxième solution.

$B_2 = 142^g,0360,$
$C_2 = 19^g,8380,$
$c_2 = 16^m,874,$
$S_2 = 2^a,0674.$

159. *On connaît dans un triangle deux côtés et l'angle opposé à l'un d'eux :*

$$a = 3645^{\text{m}},7, \qquad b = 8117^{\text{m}},5,$$
$$B = 59^\circ\, 25'\, 28''.$$

On propose de calculer le côté c, *les angles* A *et* C, *et la surface* S.

(*École des Mines de Saint-Étienne*, 1902.)

Le calcul est plus simple en cherchant la valeur de B en grades on trouve aisément

$$B = 66^{\text{g}},0272.$$

On a les formules

$$\sin A = \frac{a \sin B}{b}, \qquad C = 200 - (A + B),$$

$$c = \frac{b \sin C}{\sin B}, \qquad S = \frac{ab \sin C}{2}.$$

On a une seule solution :

$$A = 25^{\text{g}},2744, \qquad C = 108^{\text{g}},6984,$$
$$c = 9340^{\text{m}},75, \qquad S = 146593 \text{ ares}.$$

160. *Résoudre le triangle dans lequel on donne*

$$a = 2946^{\text{m}},255, \qquad c = 1602^{\text{m}},309, \qquad C = 22^\circ\, 37'\, 11'',52$$

(*École des Mines de Saint-Étienne*, 1890.)

En calculant l'angle C en grades on obtient

$$C = 25^{\text{g}},1332.$$

On a deux solutions :

$$A_1 = 50^{\text{g}},0100, \qquad A_2 = 149^{\text{g}},9900$$
$$B_1 = 124^{\text{g}},8568, \qquad B_2 = 24^{\text{g}},8768,$$
$$b_1 = 3852^{\text{m}},45, \qquad b_2 = 1586^{\text{m}},82,$$
$$S_1 = 2182750^{\text{m}^2}. \qquad S_2 = 899060^{\text{m}^2}.$$

161. *Calculer les angles, la surface et la hauteur commune des deux triangles dont on connaît*

$$a = 58^{m},935, \qquad c = 24^{m},552, \qquad C = 22^{\circ}\,37'\,12''.$$

(*École des Mines de Saint-Étienne*, 1898.)

Première solution.	*Deuxième solution.*
$A_1 = 67^{\circ}\,24'\,24''$,	$A_2 = 112^{\circ}\,35'\,36''$,
$B_1 = 89^{\circ}\,58'\,24''$,	$B_2 = 44^{\circ}\,47'\,12''$,
$b_1 = 63^{m},836$,	$b_2 = 44^{m},970$,
$S_1 = 723^{m^2},500$,	$S_2 = 509^{m^2},687$,

hauteur commune $= 22^{m},668$.

162. *Calculer les angles et les côtés des deux triangles ayant les éléments communs suivants :*

$$a = 58^{m},9251, \qquad c = 32^{m},0462, \qquad C = 22^{\circ}\,37'\,11'',52.$$

Calculer en outre la surface de la différence des deux triangles.

(*École des Mines de Saint-Étienne*, 1895.)

163. *Dans un triangle on donne*

$$A = 5^{\circ}\,10'\,25'', \qquad a = 117^{m},523, \qquad b = 124^{m},371.$$

Calculer B, C, c, S.

(*École des Mines de Saint-Étienne*, 1905.)

164. *Résoudre un triangle connaissant deux côtés et l'angle opposé à l'un d'eux :*

$$a = 120,21 \qquad b = 158,75, \qquad A = 37^{\circ}\,42'\,52''.$$

(*École supérieure d'Aéronautique et de Construction mécanique*, 1910, 2e *session*.)

165. *Calculer, soit en grades, soit en degrés, les trois angles A, B, C, d'un triangle, sachant qu'ils vérifient les équations*

$$\cos A = \frac{2}{3+\sqrt{2}}, \qquad \frac{\operatorname{tg}\frac{B-C}{2}}{\operatorname{tg}\frac{B+C}{2}} = \sqrt{\frac{m \sin A}{n}},$$

où $m = 22348, \qquad n = 89825.$

(*École Centrale*, 1908.)

I. Calcul en grades.

Calcul de A.

$$\sqrt{2} = 1,41421$$
$$3+\sqrt{2} = 4,41421$$

$$\begin{array}{ll} 4414 & 64483 \\ \quad 21 & \quad 2,1 \end{array} \qquad \Delta = 10$$

$$\log(3+\sqrt{2}) = 0,64485$$

$$\log 2 = 0,30103$$
$$-\log(3+\sqrt{2}) = \bar{1},35515$$

$$\log\cos A = \bar{1},65618 \qquad \Delta = 13$$

$$\begin{array}{lll} & 24 & 70,06 \\ & 6 & \\ & 5,2 & 4 \\ & 0,8 & 6 \end{array}$$

$$A = 70,0646.$$

$$B + C = 200 - A = 129,9354$$
$$\frac{B+C}{2} = 64,9677$$

Calcul de log sin A.

$$\begin{array}{ll} 70,06 & \bar{1},95009 \\ \quad 4 & \quad 1,2 \\ \quad 6 & \quad 0,18 \end{array} \qquad \Delta = 3$$

$$\log\sin A = \bar{1},95010$$

Calcul de $\log \operatorname{tg}\frac{B+C}{2}$.

$$\begin{array}{ll} 64,96 & 0,21207 \\ \quad 7 & \quad 10,5 \\ \quad 7 & \quad 1,05 \end{array} \qquad \Delta = 15$$

$$\log\operatorname{tg}\frac{B+C}{2} = 0,21219$$

Calcul de log *m*.

$$\begin{array}{ll} 2234 & 34908 \\ \quad 8 & \quad 16 \end{array} \qquad \Delta = 20$$

$$\log m = 4,34924$$

Calcul de log *n*.

$$\begin{array}{ll} 8982 & 95337 \\ \quad 5 & \quad 2,5 \end{array} \qquad \Delta = 5$$

$$\log n = 4,95340$$

Calcul de $\log\sqrt{\frac{m\sin A}{n}}$.

$$\log m = 4,34924$$
$$\log\sin A = \bar{1},95010$$
$$-\log n = \bar{5},04660$$

$$2\log\sqrt{\frac{m\sin A}{n}} = \bar{1},34594$$

$$\log\sqrt{\frac{m\sin A}{n}} = \bar{1},67297$$

Calcul de B *et* C.

$$\log\sqrt{\frac{m \sin A}{n}} = \bar{1},67297$$

$$\log \operatorname{tg}\frac{B+C}{2} = 0,21219$$

$\Delta = 14$

$$\log \operatorname{tg}\frac{B-C}{2} = \bar{1},88516$$

$$\begin{array}{rr} 03 & 41,67 \\ \hline 13 & \\ 12,6 & 9 \\ \hline 0,4 & 3 \end{array}$$

$$\frac{B-C}{2} = 41,6793$$

$$\frac{B+C}{2} = 64,9677$$

$$B = 106,6470$$

$$C = 23,2884$$

Résultats.

$A = 70^{g},0646$, $B = 106^{g},6470$, $C = 23^{g},2884$.

II. Calcul en degrés.

Calcul de A.

$\Delta = 25$

$$\log \cos A = \bar{1},65618$$

$$\begin{array}{rr} 30 & 63^\circ\,03' \\ \hline 12 & \\ 8,3 & 20'' \\ \hline 3,7 & 9'' \end{array}$$

$$A = 63^\circ\,03'\,29''$$

$$B + C = 180^\circ - A = 116^\circ\,56'\,31''$$

$$\frac{B+C}{2} = 58^\circ\,28'\,16''$$

Calcul de log sin A.

$\Delta = 7$

$$\begin{array}{lr} 63^\circ\,03' & \bar{1},95007 \\ 20'' & 2,3 \\ 9'' & 1,1 \\ \hline \end{array}$$

$$\log \sin A = \bar{1},95010$$

Calcul de $\log \operatorname{tg}\frac{B+C}{2}$.

$\Delta = 29$

$$\begin{array}{lr} 58^\circ\,28' & 0,21211 \\ 10'' & 4,8 \\ 6'' & 2,9 \\ \hline \end{array}$$

$$\log \operatorname{tg}\frac{B+C}{2} = 0,21219$$

Calcul de B *et* C.

$$\Delta = 26$$

$$\begin{array}{lll}
\log \operatorname{tg} \dfrac{B-C}{2} = \bar{1},88516 & & \\
\qquad\qquad\quad \underline{498} & 37^\circ\,30' & \\
\qquad\qquad\quad\ 18 & & \\
\qquad\qquad\quad \underline{17,3} & & 40'' \\
\qquad\qquad\quad\ 0,7 & & 2''
\end{array}$$

$$\frac{B-C}{2} = 37^\circ\,30'\,42''$$

$$\frac{B+C}{2} = 58^\circ\,28'\,16''$$

$$B = 95^\circ\,58'\,58''$$

$$C = 20^\circ\,57'\,34''$$

Résultats.

$$A = 63^\circ\,03'\,29'', \qquad B = 95^\circ\,58'\,58'', \qquad C = 20^\circ\,57'\,34''.$$

166. *Résoudre un triangle connaissant un côté c et les hauteurs h_a, h_b, abaissées sur les deux autres côtés. Des deux triangles qui répondent à la question, on calculera celui dont la surface est la plus grande.*

$$c = 25\,217^{\mathrm{m}}, \qquad h_a = 19\,693, \qquad h_b = 16\,512.$$

(*École Centrale*, 1896, 2^e^ *session.*)

Tout revient au calcul des angles A et B. On a les formules

$$\sin A = \frac{h_b}{c}, \qquad \sin B = \frac{h_a}{c}.$$

On peut calculer des angles aigus α et β tels que l'on ait

$$\sin \alpha = \frac{h_b}{c}, \qquad \sin \beta = \frac{h_a}{c},$$

et comme $h_a > h_b$, on a $\beta > \alpha$.

On trouve ainsi pour A les deux valeurs

$$A' = \alpha, \qquad A'' = \pi - \alpha,$$

et pour B les deux valeurs

$$B' = \beta, \qquad B'' = \pi - \beta.$$

L'angle C est donné par la formule

$$C = \pi - (A + B).$$

Sa valeur doit être positive et inférieure à π, ce qui exige

$$A + B < \pi.$$

Cette condition n'est remplie que pour les angles A', B' d'une part, et A', B'' d'autre part.

On a donc deux solutions :

$$A' = \alpha, \qquad B' = \beta, \qquad C' = \pi - (\alpha + \beta),$$
$$A' = \alpha, \qquad B'' = \pi - \beta, \qquad C'' = \beta - \alpha.$$

On doit choisir celle des deux solutions pour laquelle

$$S = \frac{1}{2}\,\frac{c^2 \sin A \sin B}{\sin C}$$

a la plus grande valeur, c'est-à-dire pour laquelle sin C est le plus petit.

Or,

$$\sin C' - \sin C'' = \sin(\alpha + \beta) - \sin(\beta - \alpha) = 2 \sin\alpha \cos\beta > 0.$$

Il faut prendre la seconde solution.

Les formules de résolution sont les suivantes :

$$\sin\alpha = \frac{h_b}{c}, \qquad \sin\beta = \frac{h_a}{c},$$

$$A = \alpha, \qquad B = \pi - \beta, \qquad C = \beta - \alpha,$$

$$a = \frac{c \sin\alpha}{\sin C}, \qquad b = \frac{c \sin\beta}{\sin C}, \qquad S = \frac{c^2 \sin\alpha \sin\beta}{2 \sin C}.$$

Nous calculerons les angles en grades.

Calcul de $\log c$. $\Delta = 18$

2521	40157
7	12,6
$\log c = 4,40170$	

Calcul de $\log h_a$. $\Delta = 22$

1969	29425
3	6,6
$\log h_a = 4,29432$	

Calcul de $\log h_b$.

$\Delta = 26$

1651	21775
2	5,2

$\log h_b = 4,21780$

Calcul de α *et de* A.

$\log h_b = 4,21780$
$-\log c = \bar{5},59830$

$\Delta = 8$

$\log \sin \alpha = \bar{1},81610$

03	45,44	
7		
6,4	8	
0,6	7	

$\alpha = 45,4487$
$A = 45,4487$

Calcul de β, *de* B *et de* C.

$\log h_a = 4,29432$
$-\log c = \bar{5},59830$

$\Delta = 5$

$\log \sin \beta = \bar{1},89262$

1	57,05
1	20

$\beta = 57,0520$
$B = 200 - \beta = 142,9480$
$C = \beta - \alpha = 11,6033$

Calcul de $\log \sin C$.

$\Delta = 37$

11,60	$\bar{1},25817$
3	11,1
3	1,11

$\log \sin C = \bar{1},25829$

Calcul de a.

$\log c = 4,40170$
$\log \sin \alpha = \bar{1},81610$
$-\log \sin C = 0,74171$ $\Delta = 5$

$\log a = 4,95951$ 9109

47	
4	8

$a = 91098$

Calcul de b.

$\log c = 4,40170$
$\log \sin \beta = \bar{1},89262$
$-\log \sin C = 0,74171$

$\Delta = 40$

$\log b = 5,03603$

583	1086
20	5

$b = 108650$

Calcul de S.

$2 \log c = 8,80340$
$\log \sin \alpha = \bar{1},81610$
$\log \sin \beta = \bar{1},89262$
$-\log \sin C = 0,74171$
$-\log 2 = \bar{1},69897$

$\Delta = 5$

$\log S = 8,95280$

79	8970
1	2

$S = 897\,020\,000$

Résultats.

$A = 45^g,4487$, $B = 142^g,9480$, $C = 11^g,6033$,
$a = 91098^m$, $b = 108650^m$, $S = 897020000^{m^2}$.

167. *Résoudre un triangle connaissant un angle* A, *le périmètre* $2p$ *et la somme* s *des sinus des angles. On donnera les conditions de possibilité de ce triangle.*

$$A = 62^\circ\, 11'\, 17'', \qquad 2p = 793^{m},075, \qquad s = 2,422.$$

(*École Centrale*, 1896, *1re session.*)

Des formules connues

$$\frac{a}{\sin A} = \frac{b}{\sin B} = \frac{c}{\sin C}$$

on déduit

$$\frac{a}{\sin A} = \frac{2p}{s} = \frac{b+c}{\sin B + \sin C} = \frac{b-c}{\sin B - \sin C},$$

ou

$$\frac{a}{\sin A} = \frac{2p}{s} = \frac{b+c}{2\cos\frac{A}{2}\cos\frac{B-C}{2}} = \frac{b-c}{2\sin\frac{A}{2}\sin\frac{B-C}{2}}.$$

On obtient les relations suivantes, qui permettent de calculer les éléments inconnus du triangle.

$$a = 2\,\frac{2p\sin\frac{A}{2}\cos\frac{A}{2}}{s},$$

$$b + c = 2p - a,$$

$$\cos\frac{B-C}{2} = \frac{(b+c)\sin\frac{A}{2}}{a}$$

$$b - c = \frac{a\sin\frac{B-C}{2}}{\cos\frac{A}{2}},$$

$$S = bc\sin\frac{A}{2}\cos\frac{A}{2}.$$

Une discussion facile montre que le problème n'est possible que si l'on a

$$2\sin A < s < \sin A + 2\cos\frac{A}{2}.$$

Calcul de $\log 2p$.

$\Delta = 6$

7930	89927
7	4,2
5	0,3

$\log 2p = 2,89932$

Calcul de $\log \sin \frac{A}{2}$.

$$\frac{A}{2} = 31^\circ\, 05'\, 39''$$

$\Delta = 21$

$31^\circ\, 5'$	$\bar{1},71289$
$30''$	10,5
$9''$	3,2

$\log \sin \frac{A}{2} = \bar{1},71303$

Calcul de $\log \cos \frac{A}{2}$.

$\Delta = 8$

$31^\circ\, 06'$	$\bar{1},93261$
$20''$	2,7
$1''$	0,13

$\log \cos \frac{A}{2} = \bar{1},93264$

Calcul de a *et de* $b + c$.

$$\log 2 = 0,30103$$
$$\log 2p = 2,89932$$
$$\log \sin \frac{A}{2} = \bar{1},71303$$
$$\log \cos \frac{A}{2} = \bar{1},93264$$
$$-\log s = \bar{1},61583$$

$\Delta = 15$

$\log a = 2,46185$

80	2896
5	
4,5	3
0,5	3

$$a = 289,633$$
$$2p = 793,075$$
$$b + c = 503,442$$

Calcul de $\log (b + c)$.

$\Delta =$

5034	70191
4	3,6
2	0,18

$\log (b + c) = 2,70195$

Calcul de B *et* C.

$$\log (b + c) = 2,70195$$
$$\log \sin \frac{A}{2} = \bar{1},71303$$
$$-\log a = \bar{3},53815$$

$\Delta = 7$

$\log \cos \frac{B - C}{2} = \bar{1},95313$

17	$26^\circ\, 8'$
4	
3,5	$30''$
0,5	$4''$

$$\frac{B - C}{2} = 26^\circ\, 08'\, 34''$$
$$\frac{B + C}{2} = 58^\circ\, 54'\, 21''$$
$$B = 85^\circ\, 02'\, 55''$$
$$C = 32^\circ\, 45'\, 47''$$

Calcul de $\log \sin \frac{B - C}{2}$.

$\Delta = 26$

$26^\circ\, 8'$	$\bar{1},64391$
$30''$	13
$4''$	1,73

$\log \sin \frac{B - C}{2} = \bar{1},64406$

Calcul de b et de c.

$$\log a = 2{,}46185$$
$$\log\sin\frac{B-C}{2} = \bar{1}{,}64406$$
$$-\log\cos\frac{A}{2} = 0{,}06736$$

$\Delta = 29$

$$\log(b-c) = 2{,}17327$$

19	1490	
8		
5,8	2	
2,2	7	

$$b - c = 149{,}027$$
$$b + c = 503{,}442$$
$$2b = 652{,}469$$
$$2c = 354{,}415$$
$$b = 326{,}235$$
$$c = 177{,}208$$

Calcul de log b.

$\Delta = 14$

3262	51348
3	4,2
5	0,7

$$\log b = 2{,}51353$$

Calcul de log c.

$\Delta = 25$

1772	24846
08	2

$$\log c = 2{,}24848$$

Calcul de S.

$$\log b = 2{,}51353$$
$$\log c = 2{,}24848$$
$$\log\sin\frac{A}{2} = \bar{1}{,}71303$$
$$\log\cos\frac{A}{2} = \bar{1}{,}93264$$

$\Delta = 17$

$$\log S = 4{,}40768$$

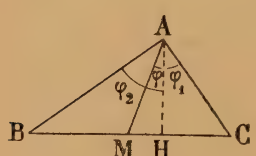
56	2556
12	7

$$S = 25567.$$

Résultats:

$a = 289^{m},633$, $b = 326^{m}235$, $c = 177^{m},208$,
$B = 85^{\circ}\,02'\,55''$, $C = 32^{\circ}\,45'\,47''$, $S = 25567^{m2}$.

168. *Dans un triangle* ABC *on donne le côté* $BC = a = 928^{m},50$, *la hauteur* $AH = h = 338^{m},25$, *la médiane* $AM = m = 406^{m},15$.



On demande de calculer les deux autres côtés et les trois angles.

(*École des Ponts et Chaussées*, 1890.)

Nous poserons

$$\widehat{MAH} = \varphi, \qquad \widehat{HAC} = \varphi_1, \qquad \widehat{HAB} = \varphi_2,$$

et nous utiliserons les formules suivantes :

$$\cos\varphi = \frac{h}{m}, \qquad \mathrm{MH} = h \operatorname{tg}\varphi,$$

$$\mathrm{HC} = \frac{a}{2} - \mathrm{MH}, \qquad \mathrm{HB} = \frac{a}{2} + \mathrm{MH},$$

$$\operatorname{tg}\varphi_1 = \frac{\mathrm{HC}}{h}, \qquad \mathrm{C} = 100^{\mathrm{g}} - \varphi_1, \qquad b = \frac{h}{\cos\varphi_1},$$

$$\operatorname{tg}\varphi_2 = \frac{\mathrm{HB}}{h}, \qquad \mathrm{B} = 100^{\mathrm{g}} - \varphi_2, \qquad c = \frac{h}{\cos\varphi_2},$$

$$\mathrm{A} = \varphi_1 + \varphi_2.$$

Calcul de $\log h$.

$\Delta = 13$

3382	52917
5	6,5

$\log h = 2{,}52924$

Calcul de $\log m$.

$\Delta = 11$

4061	60863
5	5,5

$\log m = 2{,}60869$

Calcul de φ.

$\log h = 2{,}52924$

$-\log m = \bar{3}{,}39131$

$\log\cos\varphi = \bar{1}{,}92055$

$\Delta = 4$

7	37,34
2	50

$\varphi = 37{,}3450$

Calcul de $\log \operatorname{tg}\varphi$.

$\Delta = 15$

37,34	$\bar{1}{,}82253$
50	7,5

$\log\operatorname{tg}\varphi = \bar{1}{,}82261$

Calcul de MH.

$\log h = 2{,}52924$

$\log\operatorname{tg}\varphi = \bar{1}{,}82261$

$\log \mathrm{MH} = 2{,}35185$

$\Delta = 19$

0	2248
5	3

$\mathrm{MH} = 224{,}83$

Calcul de HB *et* HC.

$$\frac{a}{2} = 464{,}25$$

$$\mathrm{MH} = 224{,}83$$

$$\mathrm{HC} = \frac{a}{2} - \mathrm{MH} = 239{,}42$$

$$\mathrm{HB} = \frac{a}{2} + \mathrm{MH} = 689{,}08$$

Calcul de $\log$ HC.

$\Delta = 19$

2394	37912
2	3,8

$\log \mathrm{HC} = 2{,}37916$

Calcul de $\log$ HB.

$\Delta = 6$

6890	83822
8	4,8

$\log \mathrm{HB} = 2{,}83827$

Calcul de φ_1 et de C.

$\log \mathrm{HC} = 2,37916$
$-\log h = \bar{3},47076$ $\quad \Delta = 15$

$\log \operatorname{tg} \varphi_1 = \bar{1},84992$

88	39,21	
4		
3	2	
1	7	

$\varphi_1 = 39,2127$
$C = 100 - \varphi_1 = 60,7873$

Calcul de $\log \cos \varphi_1$. $\quad \Delta = 5$

39,22	$\bar{1},91177$
7	3,5
3	0,15

$\log \cos \varphi_1 = \bar{1},91181$

Calcul de b.

$\log h = 2,52924$
$-\log \cos \varphi_1 = 0,08819$ $\quad \Delta = 10$

$\log b = 2,61743$

2	4144
1	1

$b = 414,41$

Calcul de φ_2 et de B.

$\log \mathrm{HB} = 2,83827$
$-\log h = \bar{3},47076$

$\log \operatorname{tg} \varphi_2 = 0,30903$

$\varphi_2 = 70,9500$
$B = 29,0500$

Calcul de A.

$\varphi_1 = 39,2127$
$\varphi_2 = 70,9500$
$A = \varphi_1 + \varphi_2 = 110,1627.$

Calcul de c.

$\log h = 2,52924$
$-\log \cos \varphi_2 = 0,35591$ $\quad \Delta = 6$

$\log c = 2,88515$

3	7676
2	3

$c = 767,63$

Résultats.

$$A = 110^{g},1627, \qquad B = 29^{g},0500, \qquad C = 60^{g},7873,$$
$$b = 414^{m},41, \qquad c = 767^{m},63.$$

169. *Résoudre un triangle connaissant l'angle* A, *le côté opposé* a *et la somme* $b + c = l$ *des deux autres côtés.*

$$A = 78^{g},2784, \qquad a = 422^{m},55, \qquad l = 513^{m},28.$$

En posant $\dfrac{B + C}{2} = \alpha$, $\dfrac{B - C}{2} = \beta$, *on a les formules*

$$\alpha = 100 - \frac{A}{2}, \qquad \cos\beta = \frac{l}{a}\sin\frac{A}{2},$$

d'où l'on déduit B *et* C ; *puis*

$$b - c = a \frac{\sin \beta}{\sin \alpha},$$

d'où l'on déduit b *et* c.

(*École spéciale des Travaux publics*, 1911.)

$$\frac{A}{2} = 39,1392$$

$$\alpha = 100 - \frac{A}{2} = 60,8608$$

Calcul de log a. $\Delta = 10$

4225	62583
5	5

$\log a = 2,62588$

Calcul de log l. $\Delta = 8$

5132	71029
8	6,4

$\log l = 2,71035$

Calcul de $\log \sin \frac{A}{2}$. $\Delta = 10$

39,13	$\bar{1},76093$
92	9,2

$\log \sin \frac{A}{2} = \bar{1},76102$

Calcul de β, *de* B *et* C.

$$\log l = 2,71035$$
$$\log \sin \frac{A}{2} = \bar{1},76102$$
$$-\log a = \bar{3},37412$$
$$\log \cos \beta = \bar{1},84549$$
$$\beta = 50,5800$$
$$\frac{B + C}{2} = 60,8608$$
$$\frac{B - C}{2} = 50,5800$$
$$B = 111,4408$$
$$C = 10,2808$$

Calcul de $\log \sin \alpha$. $\Delta = 5$

60,86	$\bar{1},94216$
08	0,4

$\log \sin \alpha = \bar{1},94216$

Calcul de b *et* c.

$$\log a = 2,62588$$
$$\log \sin \beta = \bar{1},85341$$
$$-\log \sin \alpha = 0,08784$$
$$\log (b - c) = 2,56713$$

$\Delta = 11$

03	3690
10	9

$$b - c = 369,09$$
$$b + c = 513,28$$
$$2b = 882,37$$
$$2c = 144,19$$
$$b = 441,185$$
$$c = 72,095$$

Vérification.

Comme vérification on peut montrer que l'on a

$$\log \frac{a}{\sin A} = \log \frac{b}{\sin B} = \log \frac{c}{\sin C}.$$

Calcul de $\log \sin A$.

$\Delta = 3$

78,27	$\bar{1},97419$
8	2,4
4	0,12

$\log \sin A = \bar{1},97422$

Calcul de $\log \frac{a}{\sin A}$.

$\log a = 2,62588$
$-\log \sin A = 0,02578$

$\log \frac{a}{\sin A} = 2,65166$

Calcul de $\log b$.

$\Delta = 10$

4411	64454
85	8,5

$\log b = 2,64463$

Calcul de $\log \sin B$.

$B = 111,4408$
$200 - B = 88,5592$
$\log \sin B = \bar{1},99295$

Calcul de $\log \frac{b}{\sin B}$.

$\log b = 2,64463$
$-\log \sin B = 0,00705$

$\log \frac{b}{\sin B} = 2,65168$

Calcul de $\log c$.

$\Delta = 6$

7209	85788
5	3

$\log c = 1,85791$

Calcul de $\log \sin C$.

$\Delta = 42$

10,28	$\bar{1},20622$
08	3,36

$\log \sin C = \bar{1},20625$

Calcul de $\log \frac{c}{\sin C}$.

$\log c = 1,85791$
$-\log \sin C = 0,79375$

$\log \frac{c}{\sin C} = 2,65166$

Résultats.

$B = 111^{g},4408,$ $C = 10^{g},2808,$
$b = 441^{m},285,$ $c = 72^{m},095.$

170. *Résoudre un triangle rectangle connaissant sa surface* $s = 875\,617^{m^2},5$ *et celle du cercle circonscrit* $\sigma = 3\,356\,732^{m^2},3$.
(*École Centrale,* 1892, 2*e* *session.*)

Désignons, selon l'usage, par a l'hypoténuse et par b, c les côtés de l'angle droit ; nous avons

$$bc = 2s, \qquad \frac{\pi a^2}{4} = \sigma.$$

Nous en tirons d'abord

$$a^2 = \frac{4\sigma}{\pi}, \qquad \text{puis} \qquad \frac{4bc}{\pi a^2} = \frac{2s}{\sigma},$$

ou

$$\frac{\pi s}{\sigma} = \frac{2bc}{a^2} = 2 \sin B \cos B = \sin 2B.$$

Les formules de résolution sont donc

$$a^2 = \frac{4\sigma}{\pi}, \qquad \sin 2B = \frac{\pi s}{\sigma}, \qquad b = a \sin B, \qquad c = a \cos B.$$

Calcul de log *s*.

$\Delta = 5$

8756	94231
1	0,5
7	0,35

$\log s = 5,94232$

Calcul de log *σ*.

$\Delta = 13$

3356	52582
7	9,1
3	0,39
2	0,026

$\log \sigma = 6,52592$

$\log \pi = 0,49715$

Calcul de a.

$\log 4 = 0,60206$
$\log \sigma = 6,52591$
$-\log \pi = \bar{1},50285$

$2 \log a = 6,63082$

$\Delta = 21$

$\log a = 3,31541$

34	2067
7	
6,3	3
0,7	3

$a = 2067,33.$

Calcul de B *et de* C.

$\log \pi = 0,49715$
$\log s = 5,94232$
$-\log \sigma = \bar{7},47408$

$\log \sin 2B = \bar{1},91355$
$2B = 61,1500,$
$B = 30,5750,$
$C = 69,4250.$

Calcul de log sin B. $\Delta = 14$

$$\begin{array}{ll} 30{,}57 & \bar{1}{,}66459 \\ \quad 50 & \qquad\quad 7 \\ \hline \end{array}$$

$$\log \sin B = \bar{1}{,}66466$$

Calcul de b. $\Delta = 4$

$$\begin{array}{r} \log a = 3{,}31541 \\ \log \sin B = \bar{1}{,}66466 \\ \hline \log b = 2{,}98007 \end{array}$$

$$\begin{array}{rr} 5 & 9551 \\ \hline 2 & 5 \end{array}$$

$$b = 955{,}15$$

Calcul de log cos B. $\Delta = 4$

$$\begin{array}{ll} 30{,}58 & \bar{1}{,}94784 \\ \quad 50 & \qquad\quad 2 \\ \hline \end{array}$$

$$\log \cos B = \bar{1}{,}94786$$

Calcul de c. $\Delta = 24$

$$\begin{array}{r} \log a = 3{,}31541 \\ \log \cos B = \bar{1}{,}94786 \\ \hline \log c = 3{,}26327 \end{array}$$

$$\begin{array}{rr} 16 & 1833 \\ \hline 11 & \\ 9{,}6 & 4 \\ \hline 1{,}4 & 6 \end{array}$$

$$c = 1833{,}46$$

Résultats.

$$a = 2067^{m}{,}33, \qquad b = 955^{m}{,}15, \qquad c = 1833^{m}{,}46,$$

$$B = 30^{g}{,}5750, \qquad C = 69^{g}{,}4250.$$

171. *Dans un triangle isocèle* ABC *on a*

$$b = c = 35^{m}{,}876, \qquad a = 24^{m}{,}853.$$

On demande de calculer :

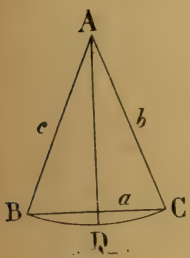
1° *la surface du triangle ;*

2° *l'aire du secteur circulaire* ABDC *dans le cercle de centre* A *et de rayon* AB ;

3° *le volume engendré par la révolution complète du secteur* ABDC *tournant autour de son axe de symétrie* AD.

(*École Polytechnique,* 1904.)

Désignons par A l'angle BAC, exprimé en grades, par T la surface du triangle ABC, par S la surface du secteur et par V le volume engendré par le secteur tournant autour de AD.



On a les formules

$$\sin\frac{A}{2} = \frac{a}{2b}, \qquad T = \frac{1}{2} b^2 \sin A,$$

$$S = \frac{\pi b^2 A}{400}, \qquad V = \frac{4}{3}\pi b^3 \sin^2 \frac{A}{4}.$$

On trouve successivement

$$\log\sin\frac{A}{2} = \overline{1},53955, \qquad A = 45^{g},0356,$$

$$\log T = 2,62139, \qquad T = 418^{m2},21,$$

$$\log S = 2,65825, \qquad S = 455^{m2},25,$$

$$\log V = 3,77719, \qquad V = 5\,986^{m3},7.$$

172. *On donne deux cercles de centres* O *et* O′ *et de rayons* $r = 9$ *mètres,* $r' = 15$ *mètres ; la distance des centres est* $d = 32$ *mètres.*

Calculer les angles et les côtés du triangle ABC *admettant le cercle* O *comme cercle inscrit et le cercle* O′ *comme cercle exinscrit dans l'angle* A.

(*École des Ponts et Chaussées,* 1902.)

On s'appuiera sur les formules

$$\sin\frac{A}{2} = \frac{r'-r}{d}, \qquad a = \frac{r'-r}{\operatorname{tg}\frac{A}{2}}, \qquad p = \frac{r'}{\operatorname{tg}\frac{A}{2}},$$

$$b + c = 2p - a, \qquad \cos\frac{B-C}{2} = \frac{(b+c)\sin\frac{A}{2}}{a},$$

$$b - c = (b+c)\operatorname{tg}\frac{B-C}{2}\operatorname{tg}\frac{A}{2}.$$

Avec les données numériques de la question, elles se simplifient et deviennent

$$\sin\frac{A}{2} = \frac{6}{32}, \qquad a = \frac{6}{\operatorname{tg}\frac{A}{2}}, \qquad 2p = 5a, \qquad b + c = 4a,$$

$$\cos\frac{B-C}{2} = 4\sin\frac{A}{2}, \qquad b - c = 4a\operatorname{tg}\frac{B-C}{2}\operatorname{tg}\frac{A}{2}.$$

On trouve alors

$$A = 24^g{,}0154, \qquad B = 134^g{,}0040, \qquad C = 41^g{,}9806,$$
$$a = 31^m{,}433, \qquad b = 73^m{,}449, \qquad c = 52^m{,}283.$$

Comme vérification, on peut utiliser les formules

$$r = \sqrt{\frac{(p-a)(p-b)(p-c)}{p}}, \qquad r' = \sqrt{\frac{p(p-b)(p-c)}{p-a}}.$$

173. *Soient a, b, c les côtés d'un triangle, R le rayon du cercle circonscrit, α, β, γ les hauteurs qui correspondent aux côtés a, b, c.*

On donne les rapports

$$\frac{a}{R} = 1{,}543698, \qquad \frac{b}{R} = 1{,}254376,$$

et on demande de calculer les rapports $\frac{c}{R}$, $\frac{\alpha}{a}$, $\frac{\beta}{b}$, $\frac{\gamma}{c}$, en supposant l'angle A aigu.

(*École Centrale,* 1891, 2*e session.*)

On s'appuie sur les formules

$$\frac{a}{R} = 2\sin A, \qquad \frac{b}{R} = 2\sin B, \qquad \frac{c}{R} = 2\sin C,$$

$$\frac{\alpha}{a} = \frac{\sin B \sin C}{\sin A}, \qquad \frac{\beta}{b} = \frac{\sin C \sin A}{\sin B}, \qquad \frac{\gamma}{c} = \frac{\sin A \sin B}{\sin C}.$$

On calcule d'abord

$$A = 56^g{,}1333, \qquad B = 43^g{,}1589,$$

et on en déduit

$$C = 100^g,7078\,;$$

puis,

$$\frac{c}{R} = 1,99986, \qquad \frac{\alpha}{a} = 0,81253,$$

$$\frac{\beta}{b} = 1,23054, \qquad \frac{\gamma}{c} = 0,48412.$$

174. *Dans un triangle* ABC *on donne la surface* S, *la médiane* m *relative au côté* BC *et l'un des angles* α *que font entre elles les deux autres médianes :*

$$S = 85\,354^{m^2}, \qquad m = 715^m,63, \qquad \alpha = 121^\circ\,27'\,35''.$$

Calculer la longueur a *du côté* BC *en se bornant à la plus petite valeur de cette inconnue.*

(*École Centrale,* 1897, *1re session.*)

On trouve aisément la formule

$$a = \frac{2m}{3}\sqrt{1 + \frac{6S}{m^2}\cot\alpha}.$$

On détermine d'abord un angle φ au moyen de la formule

$$\sin^2\varphi = -\frac{6S}{m^2}\cot\alpha,$$

et l'on a $$a = \frac{2m}{3}\cos\varphi.$$

On trouve $$\log\sin\varphi = \overline{1},89331\,;$$

on en déduit $$\log\cos\varphi = \overline{1},79452$$

sans calculer l'angle φ (96), et on a

$$a = 297^m,25.$$

175. *Calculer les côtés et les angles du triangle* ABC *dans lequel on connaît la surface* S, *le rayon* r *du cercle inscrit et*

le rayon r' du cercle exinscrit situé dans l'angle A :

$$S = 832^{ha},786, \qquad r = 927^{m},285, \qquad r' = 1\,276^{m},475.$$

Donner la valeur minimum de la surface S *qui correspond aux valeurs numériques données pour r et r'.*

(*École Centrale,* 1895, *1re session.*)

On calcule les angles au moyen des formules (1) et les côtés au moyen des formules (2) :

$$(1)\left\{\begin{aligned} \operatorname{tg}\frac{A}{2} &= \frac{rr'}{S}, \\ \frac{B+C}{2} &= 100^{g} - \frac{A}{2}, \\ \cos\frac{B-C}{2} &= \frac{r'+r}{r'-r}\sin\frac{A}{2}, \end{aligned}\right. \qquad (2)\left\{\begin{aligned} a &= (r'-r)\cot\frac{A}{2}, \\ b+c &= (r'+r)\cot\frac{A}{2}, \\ b-c &= (r'+r)\operatorname{tg}\frac{B-C}{2}, \end{aligned}\right.$$

et le minimum de S est

$$m = \frac{2\,r^{\frac{3}{2}}\,r'^{\frac{3}{2}}}{r'-r}.$$

On trouve

$$\begin{aligned} A &= 17^{g},9764, & a &= 2456^{m},77, & & \\ B &= 121^{g},4193, & b &= 8322^{m},84, & m &= 737^{ha},566. \\ C &= 60^{g},6043, & c &= 7182^{m},15, & & \end{aligned}$$

176. *Résoudre le triangle* ABC *dans lequel on donne les côtés b, c ainsi que l'aire* S' *du triangle qui a pour côtés les longueurs des médianes du triangle* ABC.

On choisira, parmi les solutions qui correspondent aux données numériques, celle pour laquelle la hauteur issue du sommet A *a la moindre valeur.*

$$S' = 9\,431\,760 \text{ ares}, \qquad b = 49728^{m},7, \qquad c = 67917^{m},8.$$

On prouvera que S' *est égal aux* $\frac{3}{4}$ *de la surface* S *du triangle* ABC.

(*École Centrale,* 1895, *2e session.*)

On trouve les résultats suivants :

$$A = 146^g,5200,$$
$$B = 22^g,3511,$$
$$C = 31^g,1289,$$
$$a = 107\,673^m.$$

177. *Dans le triangle* ABC *on connaît le rapport p de la longueur* BC *à la médiane relative à ce côté et le rapport q du côté* AC *au côté* AB.

Calculer la tangente du demi-angle aigu x que fait cette médiane avec le côté BC.

Calculer la valeur de x dans les hypothèses

$$p = 3, \qquad q = 1,89572.$$

(*École Centrale*, 1897, 2e *session*.)

On a dans le cas général

$$\operatorname{tg}^2 \frac{x}{2} = \frac{(p+2)^2 - q^2(p-2)^2}{q^2(p+2)^2 - (p-2)^2},$$

et, dans le cas particulier donné,

$$\operatorname{tg}^2 \frac{x}{2} = \frac{25 - q^2}{25\,q^2 - 1} = \frac{(5+q)(5-q)}{(5q+1)(5q-1)}.$$

On en déduit aisément

$$\log \operatorname{tg} \frac{x}{2} = \overline{1},69096,$$

et
$$x = 58^g,0998.$$

178. *Dans un triangle on donne en divisions centésimales*

$$\textit{angle}\ A = 96^g,3528,$$
$$\textit{angle}\ B = 45^g,3917,$$
$$\textit{périmètre}\ 2p = 1\,268^m,7.$$

Calculer les trois côtés a, b, c, le rayon r du cercle inscrit et la surface S.

Formules : $$r = p \operatorname{tg}\frac{A}{2}\operatorname{tg}\frac{B}{2}\operatorname{tg}\frac{C}{2},$$

$$S = pr, \qquad p - a = p \operatorname{tg}\frac{B}{2}\operatorname{tg}\frac{C}{2}.$$

(*École Polytechnique,* 1919.)

Réponse :

$$a = 518^{m},03, \qquad b = 339^{m},41, \qquad c = 411^{m},27,$$
$$r = 109^{m},84, \qquad S = 69676^{m^2},7.$$

179. *On donne dans un triangle : la hauteur* $h_a = 4865$ *mètres, la hauteur* $h_b = 2943$ *mètres, l'angle* $C = 55^\circ\, 40'\, 27''$.

On demande de calculer les angles A, B, *les côtés* a, b, c, *et la surface* S.

(*École des Ponts et Chaussées,* 1892.)

On utilisera les formules suivantes :

$$\frac{A+B}{2} = 90^\circ - \frac{C}{2}, \qquad \operatorname{tg}\frac{B-A}{2} = \frac{h_a - h_b}{h_a + h_b}\cot\frac{C}{2},$$

$$a = \frac{h_b}{\sin C}, \qquad b = \frac{h_a}{\sin C}, \qquad c = \frac{h_b}{\sin A}, \qquad S = \frac{1}{2}\frac{h_a h_b}{\sin C}.$$

On trouve

$$A = 37^\circ\, 10'\, 14'', \qquad B = 87^\circ\, 9'\, 19'',$$
$$a = 3563^{m},6, \qquad b = 5890^{m},9, \qquad c = 4871^{m},$$
$$S = 8668400^{m^2}.$$

180. *Entre le côté* a, *les angles* A, B, C *et la bissectrice intérieure* d *correspondant à* a *d'un triangle, il existe la relation suivante :*

$$a = d \cdot \frac{\sin B + \sin C}{\sin B \sin C} \cdot \sin\frac{A}{2}.$$

Calculer la bissectrice d, *si l'on a*

$$a = 228009, \qquad B = 16^\circ\, 45'\, 31'', \qquad C = 152^\circ\, 34'\, 13''.$$

(*Concours généraux de Belgique,* 1910.)

On trouve $\qquad d = 434840$ mètres.

181. *Dans un triangle l'angle* A *est égal à* 43 *grades, et les angles* B *et* C *vérifient la relation*

$$\sin\frac{B}{2}\sin\frac{C}{2} = \sin^2\frac{A}{2}.$$

Calculer les angles B *et* C.

(*Baccalauréat, Grenoble,* 1906.)

On trouve $B = 141^g,3560$, $C = 15^g,6440$.

182. *L'aire d'un triangle* ABC *est équivalente à celle d'un carré dont le côté est égal à* $1^m,437$*; le côté* a *est égal à* $3^m,27$*; enfin, l'angle* A *a pour cosinus* $\frac{1}{4}$.

Calculer les côtés b *et* c.

(*Baccalauréat, Grenoble,* 1905.)

On trouve

$$b = 3^m,348, \qquad c = 1^m,275.$$

183. *Dans un triangle* ABC *on a* $AB = AC$; *l'angle en* A *est de* $68°\,43'\,24''$; *la surface du triangle est de* $421^{m^2},2527$.

Calculer les angles en grades et les côtés en mètres.

(*Saint-Cyr,* 1912.)

184. *Dans un triangle* ABC *on connaît l'angle* A *égal à* $123^g,273$ *et les hauteurs* Bb, Cc *issues de* B *et* C :

$$Bb = 232^m,567, \qquad Cc = 94^m,628.$$

Calculer les côtés en mètres et les angles en grades.

(*Saint-Cyr,* 1913.)

185. *Calculer en grades les angles* A, B, C *d'un triangle* ABC *et calculer en mètres le côté* AC *de ce triangle et la médiane*

issue de A, *sachant que l'on a*

$$A = 125^\circ\,35'\,29'', \qquad AB = \frac{BC}{2} = 438^{m},73.$$

(*Saint-Cyr*, 1914.)

186. *Un triangle isocèle* ABC *a pour côtés*

$$a = 23^{m},8274, \qquad b = c = 34^{m},9865.$$

1° *Calculer* A, B, C *et la surface du triangle*, S.

2° *Calculer l'aire* σ *du secteur circulaire* ABMC *dans le cercle de centre* A *et de rayon* AB.

3° *Calculer en mètres cubes le volume engendré par la révolution complète du secteur* ABMC *tournant autour de son axe de symétrie* AM.

(*École Polytechnique*, 1898.)

187. *Résoudre un triangle connaissant le rayon du cercle circonscrit* R, *l'angle* A *et la hauteur* h_b *issue du sommet* B.

On démontrera que ce problème, pour les données suivantes, admet deux solutions et on calculera celle qui admet le plus grand côté b.

$$R = 32\,437^{m},24, \qquad A = 29^\circ\,27'\,32'',6, \qquad h_b = 21\,634^{m},75.$$

(*École Centrale*, 1894, 2^e^ *session*.)

188. *Calculer les côtés, les angles* B et C *et la surface d'un triangle* ABC *dans lequel on donne l'angle* $A = 62^\circ\,20'\,35''$, *les hauteurs issues des sommets* B *et* C, $h_b = 4\,532^{m}$, $h_c = 1\,945^{m}$.

(*École des Ponts et Chaussées*, 1895.)

189. *Résoudre le triangle* ABC *dont on connaît la base* $AB = 459^{m},963$, *la hauteur* $CK = 154^{m},037$, *l'angle*

$$CAB = 59^\circ\,37'\,42''.$$

Après avoir calculé AC, *on déterminera les autres inconnues au moyen de ce côté, de la base* AB *et de l'angle compris* CAB.

(*École des Mines de Saint-Étienne*, 1897.)

190. *Dans un triangle on donne, en divisions centésimales, l'angle* $A = 98^g 35'28''$, *l'angle* $A = 42^g 39'17''$, *le périmètre* $2p = 1\,254^m,3$.

Calculer les trois côtés a, b, c, *le rayon* r *du cercle inscrit et la surface* S.

On emploiera les formules

$$r = p \operatorname{tg}\frac{A}{2}\operatorname{tg}\frac{B}{2}\operatorname{tg}\frac{C}{2}, \qquad S = pr,$$

$$p - a = p \operatorname{tg}\frac{B}{2}\operatorname{tg}\frac{C}{2}$$

et les formules analogues pour $p - b$, $p - c$.

(*École Polytechnique*, 1905.)

191. *On donne deux angles à la base d'un triangle* ABC, *savoir :* $B = 72° 27' 48''$, $C = 41° 19' 23''$ *et la hauteur* $AD = 4^m,53$.

1° *Calculer les trois côtés du triangle.*

2° *Calculer, en décimètres cubes, le volume* V *engendré par le triangle tournant autour de sa base* BC.

(*École Polytechnique*, 1897.)

192. *Calculer les côtés et les angles d'un triangle dont on donne les médianes* α, β, γ, *issues respectivement des sommets* A, B, C *du triangle :*

$$\alpha = 120\,000, \qquad \beta = 90\,000 \qquad \gamma = 60\,000.$$

(*École Centrale*, 1893, *1re session*.)

193. *Résoudre un triangle connaissant deux côtés*, a, b, *et le rayon du cercle circonscrit*, R.

On donne

$$a = 4737,523, \qquad b = 3427,645, \qquad R = 6743,823.$$

(*École Centrale*, 1893, 2^e *session.*)

194. *Résoudre un triangle connaissant*

$$a = 8257^{m}, \qquad A = 39^{\circ}\,25'\,7'', \qquad S = 18\,359\,625^{m^2}.$$

(*École des Ponts et Chaussées*, 1891.)

195. *On donne la hauteur h d'un triangle* ABC *issue du sommet* B, *la surface* S *et l'angle* A.

Résoudre le triangle et calculer le rayon du cercle circonscrit quand

$$h = 9^{m},78, \qquad S = 71^{m^2},23, \qquad A = 42^{\circ}\,30'\,27''.$$

(*École des Ponts et Chaussées, cours spéciaux*, 1906.)

CHAPITRE VI

EXERCICES DIVERS

196. *Pour évaluer la distance des points* A *et* B *inaccessibles, on a mesuré la distance de deux points* C *et* D, *et les angles que forment* CA, CB, DA, DB *avec la direction* CD.

1° *On demande d'établir les formules qui permettent de calculer la distance* AB *et les distances* AH *et* BK *des points* A et B *à la base* CD.

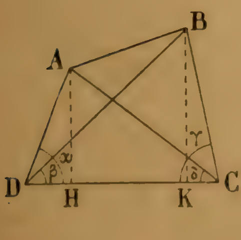
2° *On donne* $\mathrm{CD} = 500^{\mathrm{m}}$.

$$\alpha = \widehat{\mathrm{CDA}} = 70^\circ\, 21'\, 33'', \qquad \beta = \widehat{\mathrm{CDB}} = 35^\circ\, 10'\, 42'',$$
$$\delta = \widehat{\mathrm{DCA}} = 29^\circ\ \ 4'\, 10'', \qquad \gamma = \widehat{\mathrm{DCB}} = 60^\circ\, 12'\, 45''.$$

Calculer les valeurs numériques de AB, AH, BK.

Les quatre points A, B, C, D *sont dans un même plan horizontal.*

(*École des Ponts et Chaussées,* 1905.)



Dans les triangles ACD et BCD on a

$$\mathrm{AD} = \frac{\mathrm{CD}\sin\delta}{\sin(\alpha+\delta)}, \qquad \mathrm{BD} = \frac{\mathrm{CD}\sin\gamma}{\sin(\beta+\gamma)}.$$

Dans le triangle ABD on connaît alors les deux côtés AD, BD et l'angle compris $\widehat{\mathrm{ADB}} = \alpha - \beta$, on peut calculer

les angles $A = \widehat{DAB}$, $B = \widehat{ABD}$ et le côté AB au moyen des formules

$$\operatorname{tg}\frac{A-B}{2} = \frac{BD-AD}{BD+AD}\cdot\frac{1}{\operatorname{tg}\frac{\alpha-\beta}{2}}, \qquad AB = \frac{AD\sin(\alpha-\beta)}{\sin B}.$$

Enfin on a

$$AH = AD\sin\alpha, \qquad BK = BD\sin\beta.$$

Pour simplifier les calculs, nous exprimerons les angles donnés en grades, en utilisant les tables de conversion qui se trouvent dans les tables de logarithmes. Nous obtenons ainsi

$$\alpha = 78^{g},1769, \qquad \beta = 39^{g},0870,$$
$$\delta = 32^{g},2994, \qquad \gamma = 66^{g},9028,$$

et nous en tirons

$$\alpha+\delta = 110^{g},4763, \qquad \beta+\gamma = 105^{g},9898,$$
$$\alpha-\beta = 39^{g},0899, \qquad \frac{\alpha-\beta}{2} = 19^{g},5449.$$

Calcul de log sin δ.

$$\Delta = 13$$

$$\begin{array}{rr} 32,29 & \bar{1},68640 \\ 9 & 11,7 \\ 4 & 0,52 \\ \hline \end{array}$$

$$\log\sin\delta = \bar{1},68652$$

Calcul de log sin (α + δ).

$$\begin{aligned} \alpha+\delta &= 110,4763 \\ 200-(\alpha+\delta) &= 89,5237 \\ \log\sin(\alpha+\delta) &= \bar{1},99409 \end{aligned}$$

Calcul de AD.

$$\begin{array}{rrr} \log CD = & 2,69897 & \\ \log\sin\delta = & \bar{1},68652 & \\ -\log\sin(\alpha+\delta) = & 0,00591 & \Delta = 17 \\ \hline \log AD = & 2,39140 & \\ & 29 & 2462 \\ \cline{2-2} & 11 & 6 \end{array}$$

$$AD = 246,26.$$

Calcul de log sin γ.

$$\Delta = 3$$

$$\begin{array}{rr} 66,90 & \bar{1},93845 \\ 2 & 0,6 \\ 8 & 0,24 \\ \hline \end{array}$$

$$\log\sin\gamma = \bar{1},93846$$

Calcul de $\log \sin (\beta + \gamma)$.

$$\beta + \gamma = 105,9898$$
$$200 - (\beta + \gamma) = 94,0102$$
$$\log \sin (\beta + \gamma) = \bar{1},99807$$

Calcul de BD.

$$\log CD = 2,69897$$
$$\log \sin \gamma = \bar{1},93846$$
$$- \log \sin (\beta + \gamma) = 0,00193$$

$\Delta = 10$

$$\log BD = 2,63936$$

29	4358
7	7

$$BD = 435,87.$$

$$BD = 435,87$$
$$AD = 246,26$$
$$BD + AD = 682,13$$
$$BD - AD = 189,61$$

Calcul de $\log (BD - AD)$.

$\Delta = 23$

1896	27784
1	2,3

$$\log (BD - AD) = 2,27786$$

Calcul de $\log (BD + AD)$.

$\Delta = 6$

6821	83385
3	1,8

$$\log (BD + AD) = 2,83387$$

Calcul de $\log \operatorname{tg} \frac{\alpha - \beta}{2}$.

$\Delta = 24$

19,54	$\bar{1},50099$
4	9,6
9	2,16

$$\log \operatorname{tg} \frac{\alpha - \beta}{2} = \bar{1},50111$$

Calcul de A *et* B.

$$\log (BD - AD) = 2,27786$$
$$- \log (BD + AD) = \bar{3},16613$$
$$- \log \operatorname{tg} \frac{\alpha - \beta}{2} = 0,49889$$

$\Delta = 14$

$$\log \operatorname{tg} \frac{A - B}{2} = \bar{1},94288$$

0	45,82
8	
7	5
1	7

$$\frac{A - B}{2} = 45,8257$$
$$\frac{A + B}{2} = 80,4551$$
$$A = 126,2808$$
$$B = 34,6294$$

Calcul de $\log \sin (\alpha - \beta)$.

$\Delta = 9$

39,08	$\bar{1},76045$
9	8,1
9	0,81

$$\log \sin (\alpha - \beta) = \bar{1},76054$$

Calcul de $\log \sin B$.

$\Delta = 11$

34,62	$\bar{1},71383$
9	9,9
4	0,44

$$\log \sin B = \bar{1},71393$$

Calcul de AB.

$$\log AD = 2,39140$$
$$\log \sin (\alpha - \beta) = \bar{1},76054$$
$$- \log \sin B = 0,28607$$

$\Delta = 16$

$$\log AB = 2,43801$$

791	2741
10	6

$$AB = 274,16.$$

Calcul de log sin α.

$$\Delta = 2$$

$$\begin{array}{lr}
78{,}17 & \bar{1}{,}97395 \\
\quad 6 & 1{,}2 \\
\quad\ 9 & 0{,}18 \\
\hline
\multicolumn{2}{l}{\log\sin\alpha = \bar{1}{,}97396}
\end{array}$$

Calcul de log sin β.

$$\Delta = 9$$

$$\begin{array}{lr}
39{,}08 & \bar{1}{,}76045 \\
\quad 70 & 6{,}3 \\
\hline
\multicolumn{2}{l}{\log\sin\beta = \bar{1}{,}76051}
\end{array}$$

Calcul de AH.

$$\begin{array}{l}
\log AD = 2{,}39140 \\
\log\sin\alpha = \bar{1}{,}97396 \\
\hline
\log AH = 2{,}36536
\end{array}
\qquad \Delta = 19$$

$$\begin{array}{rr}
0 & 2319 \\
\hline
6 & 3
\end{array}$$

$$AH = 231{,}93.$$

Calcul de BK.

$$\begin{array}{l}
\log BD = 2{,}63936 \\
\log\sin\beta = \bar{1}{,}76051 \\
\hline
\log BK = 2{,}39987
\end{array}
\qquad \Delta = 17$$

$$\begin{array}{rr}
5 & 2511 \\
\hline
2 & 1
\end{array}$$

$$BK = 251{,}11$$

Comme vérification on peut aussi calculer AC et BC par les formules

$$AC = \frac{CD \sin\alpha}{\sin(\alpha + \delta)}, \qquad BC = \frac{CD \sin\beta}{\sin(\beta + \gamma)},$$

puis résoudre le triangle ABC.

On trouve ainsi

$$AC = 477{,}37, \qquad BC = 289{,}34,$$

$$\widehat{CAB} = 36^g{,}7552, \qquad \widehat{ABC} = 128^g{,}6414,$$

et

$$AB = 274^m{,}16.$$

Résultats.

$$AB = 274^m{,}16, \qquad AH = 231^m{,}93, \qquad BK = 251^m{,}11.$$

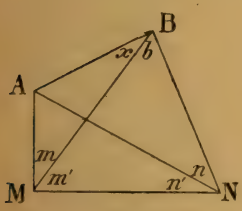
197. *Pour obtenir la distance d'un point* M *à l'extrémité* A *d'un mur* AB *de longueur connue et égale à* $118^{m},35$ *dont le point* M *est séparé par un cours d'eau, on relève de ce point et d'une seconde station* N, *les angles*

$$\begin{aligned} \text{AMB} &= m = 46^\circ\,23'\,17'', \\ \text{BMN} &= m' = 59^\circ\,11'\,03'', \\ \text{BNA} &= n = 39^\circ\,58'\,41'', \\ \text{ANM} &= n' = 22^\circ\,41'\,01''. \end{aligned}$$

Au moyen de ces données, calculer la distance MA.

(*École des Ponts et Chaussées, cours spéciaux,* 1899.)

Désignons par x l'angle ABM ; dans le triangle ABM, on a la relation



$$\frac{\text{AM}}{\sin x} = \frac{\text{AB}}{\sin m},$$

d'où

$$\text{(1)} \qquad \text{AM} = \text{AB}\,\frac{\sin x}{\sin m}.$$

Tout revient à calculer l'angle x

Pour cela, désignons par b l'angle

$$\widehat{\text{MBN}} = 180^\circ - (m' + n + n')\,;$$

dans le triangle ABN nous avons

$$\frac{\text{AN}}{\sin(b+x)} = \frac{\text{AB}}{\sin n},$$

et, dans le triangle ANM,

$$\frac{\text{AN}}{\sin(m+m')} = \frac{\text{AM}}{\sin n'} = \frac{\text{AB}\sin x}{\sin n' \sin m}\,;$$

d'où, en éliminant AN,

$$\frac{\sin(b+x)}{\sin(m+m')} = \frac{\sin n \sin x}{\sin m \sin n'}.$$

Nous sommes ainsi ramenés à résoudre l'équation

$$\frac{\sin x}{\sin (b+x)} = \frac{\sin m \sin n'}{\sin n \sin (m+m')}.$$

Déterminons un angle φ tel que l'on ait

$$(2) \qquad \operatorname{tg} \varphi = \frac{\sin m \sin n'}{\sin n \sin (m+m')};$$

l'équation précédente s'écrit

$$\frac{\sin x}{\operatorname{tg} \varphi} = \frac{\sin (b+x)}{1} = \frac{\sin (b+x) - \sin x}{1 - \operatorname{tg} \varphi} = \frac{\sin (b+x) + \sin x}{1 + \operatorname{tg} \varphi}.$$

Or, on a

$$\sin (b+x) - \sin x = 2 \sin \frac{b}{2} \cos \left(x + \frac{b}{2}\right),$$

$$\sin (b+x) + \sin x = 2 \cos \frac{b}{2} \sin \left(x + \frac{b}{2}\right);$$

on est donc ramené à résoudre l'équation

$$(3) \qquad \operatorname{tg}\left(x + \frac{b}{2}\right) = \operatorname{tg} \frac{b}{2} \operatorname{tg} (\varphi + 45^\circ).$$

On calculera d'abord l'angle φ au moyen de l'équation (2), puis l'angle x au moyen de (3) et enfin AM sera donné par l'équation (1).

Calcul de $\log \sin m$. $\Delta = 12$

$46^\circ 23'$	$\bar{1},85972$	
$10''$	2	
$7''$	1,4	
$\log \sin m = \bar{1},85975$		

Calcul de $\log \sin n$. $\Delta = 15$

$39^\circ 58'$	$\bar{1},80777$	
$40''$	10	
$1''$	0,25	
$\log \sin n = \bar{1},80787$		

Calcul de $\log \sin n'$.

$\Delta = 30$

$22^\circ 41'$	$1,58618$
$1''$	$0,5$

$\log \sin n' = \bar{1},58619$

Calcul de $\log \sin (m + m')$.

$$m + m' = 105^\circ 34' 20''$$
$$180^\circ - (m + m') = 74^\circ 25' 40''$$

$\Delta = 4$

$74^\circ 25'$	$\bar{1},98373$
$40''$	$2,7$

$\log \sin (m + m') = \bar{1},98376$

Calcul de φ.

$$\log \sin m = \bar{1},85975$$
$$\log \sin n' = \bar{1},58619$$
$$-\log \sin n = 0,19213$$
$$-\log \sin (m + m') = 0,01624$$

$\Delta = 34$

$\log \operatorname{tg} \varphi = \bar{1},65431$	
00	$24^\circ 16'$
31	
$28,3$	$50''$
$2,7$	$5''$

$\varphi = 24^\circ 16' 55''$

Calcul de $\log \operatorname{tg} (\varphi + 45^\circ)$.

$$\varphi + 45^\circ = 69^\circ 16' 55''$$

$\Delta = 38$

$69^\circ 16'$	$0,42190$
$50''$	$31,7$
$5''$	$3,17$

$\log \operatorname{tg} (\varphi + 45^\circ) = 0,42225$

Calcul de $\log \operatorname{tg} \frac{b}{2}$.

$$m' + n + n' = 121^\circ 50' 45''$$
$$b = 58^\circ 09' 15''$$
$$\frac{b}{2} = 29^\circ 04' 38''$$

$\Delta = 30$

$29^\circ 4'$	$\bar{1},74494$
$30''$	15
$8''$	4

$\log \operatorname{tg} \frac{b}{2} = \bar{1},74513$

Calcul de x.

$$\log \operatorname{tg} \frac{b}{2} = \bar{1},74513$$
$$\log \operatorname{tg} (\varphi + 45^\circ) = 0,42225$$

$\Delta = 28$

$\log \operatorname{tg} \left(x + \frac{b}{2}\right) = 0,16738$	
20	$55^\circ 46'$
18	
14	$30''$
4	$9''$

$$x + \frac{b}{2} = 55^\circ 46' 39''$$
$$\frac{b}{2} = 29^\circ 04' 38''$$
$$x = 26^\circ 42' 01''$$

Calcul de $\log \sin x$.

$\Delta = 26$

$26^\circ 42'$	$\bar{1},65255$
$01''$	$0,43$

$\log \sin x = \bar{1},65255$

Calcul de log AB.

$\Delta = 37$

1183	07298
5	18,5
log AB $= 2,07317$	

Calcul de AM.

$$\log \mathrm{AB} = 2,07317$$
$$\log \sin x = \bar{1},65255$$
$$-\log \sin m = 0,14025$$
$$\log \mathrm{AM} = 1,86597 \qquad \Delta = 6$$

3	7344
4	7

$$\mathrm{AM} = 73,447$$

Réponse.

$$\mathrm{AM} = 73^{\mathrm{m}},447.$$

198. *Deux points* A *et* B, *séparés par une colline, sont à une même cote de* 48$^{\mathrm{m}}$,263.

D'un point C, *situé au sommet de cette colline et ayant pour cote* 163$^{\mathrm{m}}$,842, *on mesure les angles*

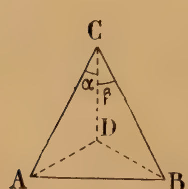
$$\alpha = 61^\circ\,32', \qquad \beta = 76^\circ\,28',$$

que font les directions CA *et* CB *avec la verticale* CD, *ainsi que l'angle des deux plans verticaux* ACD *et* BCD ; *ce dernier angle est de* 117° 16′.

Évaluer la distance AB.

(*École des Ponts et Chaussées, cours spéciaux,* 1900.)

Soit D le point de rencontre de la verticale CD et du plan horizontal des points A et B ; posons



$$h = \mathrm{CD} = 163^{\mathrm{m}},842 - 48^{\mathrm{m}},263 = 115^{\mathrm{m}},579.$$

Nous avons

$$\mathrm{DA} = h \operatorname{tg} \alpha, \qquad \mathrm{DB} = h \operatorname{tg} \beta,$$

et tout revient à calculer le côté AB du triangle DAB, dans lequel on connaît les côtés DA, DB et l'angle compris D = 117° 16′.

Les angles A et B de ce triangle sont donnés par les équations

$$\frac{A+B}{2} = 90^\circ - \frac{D}{2},$$

$$\operatorname{tg}\frac{A-B}{2} = \frac{DB-DA}{DB+DA}\cot\frac{D}{2} = \frac{\sin(\beta-\alpha)}{\sin(\beta+\alpha)}\cot\frac{D}{2}.$$

On en déduit ensuite

$$AB = \frac{AD\sin D}{\sin B} = \frac{h\operatorname{tg}\alpha\sin D}{\sin B}.$$

Calcul de B.

$$\beta-\alpha = 14^\circ 56'$$
$$\beta+\alpha = 138^\circ$$
$$180^\circ-(\beta+\alpha) = 42^\circ$$
$$\frac{D}{2} = 58^\circ 38'$$

$$\log\sin(\beta-\alpha) = \bar{1},41111$$
$$-\log\sin(\beta+\alpha) = 0,17449$$
$$\log\cot\frac{D}{2} = \bar{1},78505$$

$\Delta = 57$

$$\log\operatorname{tg}\frac{A-B}{2} = \bar{1},37065$$

23	$13^\circ 12'$	
42		
38		$40''$
4		$4''$

$$\frac{A-B}{2} = 13^\circ 12' 44''$$
$$\frac{A+B}{2} = 31^\circ 22'$$
$$B = 18^\circ 09' 16''$$

Calcul de $\log h$.

$\Delta = 38$

1155	06258
7	26,6
9	3,42

$$\log h = 2,06288$$

Calcul de $\log\sin B$.

$\Delta = 38$

$18^\circ 09'$	$\bar{1},49347$
$10''$	6,3
$6''$	3,8

$$\log\sin B = \bar{1},49357$$

Calcul de AB.

$$180^\circ - D = 62^\circ 44'$$
$$\log h = 2,06288$$
$$\log\operatorname{tg}\alpha = 0,26584$$
$$\log\sin D = \bar{1},94885$$
$$-\log\sin B = 0,50643$$

$\Delta = 7$

$$\log AB = 2,78400$$

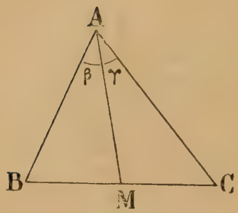
398	6081
2	3

$$AB = 608,13$$

Résultat.

$AB = 608^{m},13.$

199. *Étant donnés trois alignements droits* AB, AM, AC *issus d'un même point* A *et faisant entre eux des angles*



$$\text{BAM} = \beta = 43^\circ\, 46'\, 37'',$$
$$\text{CAM} = \gamma = 31^\circ\, 17'\, 8'',$$

on veut, d'un point M *de l'alignement intermédiaire, pris à une distance*

$$\text{AM} = 100^{\text{m}},051,$$

mener une direction BMC *qui soit partagée en deux parties égales par les trois alignements* (BM = MC).

Dans ce but, on évalue la distance AB *qu'il n'y aura plus qu'à chaîner pour obtenir le point* B.

Si l'on désigne par A, B, C *les angles du triangle* ABC, *le calcul conduit à la relation*

$$(1) \qquad \operatorname{tg} \frac{B - C}{2} = \operatorname{tg} \frac{\beta - \gamma}{2} \cot^2 \frac{A}{2},$$

qui permet de calculer les angles B *et* C *dont la somme est déjà connue.*

Au moyen de l'angle B, *le triangle* ABM *donne ensuite immédiatement la distance* AB.

Cela posé, on demande :

1° *de calculer numériquement la distance* AB *en se servant de la relation* (1) ;

2° *d'établir la relation* (1).

(*École des Ponts et Chaussées, cours spéciaux,* 1904.)

Nous réduisons d'abord les angles β et γ en grades, en utilisant les tables de conversion.

Nous obtenons

$$\beta = 48^{\text{g}},6411, \qquad \gamma = 34^{\text{g}},7617.$$

Nous en tirons

$$\beta + \gamma = A = 83^g,4028, \qquad \beta - \gamma = 13^g,8794,$$

$$\frac{A}{2} = 41^g,7014, \qquad \frac{\beta - \gamma}{2} = 6^g,9397.$$

Nous utilisons les formules

$$\operatorname{tg} \frac{B - C}{2} = \operatorname{tg} \frac{\beta - \gamma}{2} \cot^2 \frac{A}{2},$$

$$AB = AM \frac{\sin(B + \beta)}{\sin B}.$$

Calcul de $\log \operatorname{tg} \frac{\beta - \gamma}{2}$.

$\Delta = 63$

6,93	$\bar{1},03857$
9	56,7
7	4,41

$\log \operatorname{tg} \frac{\beta - \gamma}{2} = \bar{1},03918$

Calcul de $\log \cot \frac{A}{2}$.

$\Delta = 14$

41,71	0,11441
8	11,2
6	0,84

$\log \cot \frac{A}{2} = 0,11453$

Calcul de B *et* C.

$\log \operatorname{tg} \frac{\beta - \gamma}{2} = 1,03918$

$2 \log \cot \frac{A}{2} = 0,22906$

$\Delta = 38$

$\log \operatorname{tg} \frac{B - C}{2} = \bar{1},26824$

09	11,67
15	
11,4	3
3,6	9

$\frac{B - C}{2} = 11,6739$

$\frac{B + C}{2} = 58,2986$

$B = 69,9725$

$C = 46,6247$

Calcul de $\log AM$.

$\Delta = 43$

1000	00000
5	21,5
1	0,43

$\log AM = 2,00022$

Calcul de $\log \sin (B + \beta)$.

$$B = 69,9725$$
$$\beta = 48,6411$$
$$B + \beta = 118,6136$$
$$200 - (B + \beta) = 81,3864$$

$\Delta = 2$

81,38	$\overline{1},98115$
6	1,2
4	0,08

$$\log \sin (B + \beta) = \overline{1},98116$$

Calcul de $\log \sin B$.

$\Delta = 3$

69,97	$\overline{1},94978$
2	0,6
5	0,15

$$\log \sin B = \overline{1},94979$$

Calcul de AB.

$$\log AM = 2,00022$$
$$\log \sin (B + \beta) = \overline{1},98116$$
$$- \log \sin B = 0,05021$$
$$\log AB = 2,03159$$

$\Delta = 40$

41	1075
18	
16	4
2	5

$$AB = 107,545$$

Résultat.

$$AB = 107^{m},545.$$

200. *Calculer les trois angles x, y, z compris entre* $-90°$ *et* $+90°$, *satisfaisant aux relations*

$$\sin x = \frac{\sin a \cos b \sqrt{1 - k^2 \sin^2 b} + \sin b \cos a \sqrt{1 - k^2 \sin^2 a}}{1 - k^2 \sin^2 a \sin^2 b},$$

$$\sin y = \frac{\cos a \cos b - \sin a \sin b \sqrt{1 - k^2 \sin^2 a} \sqrt{1 - k^2 \sin^2 b}}{1 - k^2 \sin^2 a \sin^2 b},$$

$$\sin z = \frac{\sqrt{1 - k^2 \sin^2 a} \sqrt{1 - k^2 \sin^2 b} - k^2 \sin a \sin b \cos a \cos b}{1 - k^2 \sin^2 a \sin^2 b},$$

où l'on suppose

$$k = 0,31427,$$
$$a = 123° 48' 10'',$$
$$b = 52° 10' 20''.$$

(*École Navale,* 1913.)

I. Calcul de x.

Nous commencerons par rendre calculable par logarithmes la valeur de $\sin x$.

Nous déterminons d'abord des angles u, v, θ compris entre 0 et 90° par les relations

$$(1) \quad \sin u = k \sin a, \qquad \sin v = k \sin b, \qquad \sin \theta = k \sin a \sin b.$$

La valeur de $\sin x$ devient alors

$$\sin x = \frac{\sin a \cos b \cos v + \sin b \cos a \cos u}{\cos^2 \theta}.$$

Puis, nous calculons un nombre positif A et un angle φ compris entre 0 et 90° au moyen des formules

$$A \cos \varphi = \cos b \cos v, \qquad A \sin \varphi = \sin b \cos u,$$

ou

$$(2) \quad \operatorname{tg} \varphi = \operatorname{tg} b \frac{\cos u}{\cos v}, \qquad A = \frac{\sin b \cos u}{\sin \varphi}.$$

La valeur de $\sin x$ est alors

$$(3) \quad \sin x = \frac{A \sin(a + \varphi)}{\cos^2 \theta}.$$

En résumé, nous calculerons u, v, θ au moyen des formules (1), puis A, φ à l'aide de (2) et enfin x par la formule (3).

Calcul de $\log k$. $\Delta = 13$

3142	49721
7	9,1
$\log k = 1,49730$	

Calcul de $\log \sin a$. $\Delta = 8$

$180° - a = 56°11'60''$

56°11′	$\bar{1},91951$
50″	6,7
$\log \sin a = \bar{1},91958$	

Calcul de $\log \sin b$. $\Delta = 9$

52°10′	$\bar{1},89752$
20″	3
$\log \sin b = \bar{1},89755$	

Calcul de $\log \operatorname{tg} b$. $\Delta = 26$

52°10′	0,10980
20″	8,7
$\log \operatorname{tg} b = 0,10989$	

Calcul de log sin u *et* log cos u

$$\log k = \bar{1},49730$$
$$\log \sin a = \bar{1},91958$$
$$\log \sin u = \bar{1},41688$$

De la valeur de log sin u nous déduisons celle de log cos u en utilisant les tables où les angles sont exprimés en grades.

$$\log \cos u = \bar{1}.98466$$

Calcul de log sin v *et* log cos v.

$$\log k = \bar{1},49730$$
$$\log \sin b = \bar{1},89755$$
$$\log \sin v = \bar{1},39485$$
$$\log \sin v_1 = \bar{1},39486$$
$$D = 1$$

$\Delta_s = 27$ $\Delta_c = 2$

$$\log \cos v_1 = \bar{1},98619$$
$$0,04 \times 2 \qquad 0,08$$
$$\log \cos v = \bar{1},98619$$

Calcul de log sin 0 *et* log cos 0.

$$\log k = \bar{1},49730$$
$$\log \sin a = \bar{1},91958$$
$$\log \sin b = \bar{1},89755$$
$$\log \sin 0 = \bar{1},31443$$
$$\log \sin 0_1 = \bar{1},31455$$
$$D = 12$$
$$9,6$$
$$2,4$$

$\Delta_s = 32$ $\Delta_c = 2$

$$\text{los} \cos 0_1 = \bar{1},99055$$
$$0.3 \times 2 \qquad 0,6$$
$$0,07 \times 2 \qquad 0,14$$
$$\log \cos 0 = \bar{1},99056$$

Calcul de φ.

$$\log \operatorname{tg} b = 0,10989$$
$$\log \cos u = \bar{1},98466$$
$$-\log \cos v = 0,01381$$
$$\log \operatorname{tg} \varphi = 0,10836 \qquad \Delta = 26$$
$$23 \qquad 52^\circ\, 4'$$
$$13 \qquad 30''$$

$$\varphi = 52^\circ\, 4'\, 30''.$$

Calcul de log sin φ.

$\Delta = 9$

$$52^\circ\, 4' \qquad \bar{1},89693$$
$$30'' \qquad 4,5$$
$$\log \sin \varphi = \bar{1},89698$$

Calcul de log A.

$$\log \sin b = \bar{1},89755$$
$$\log \cos u = \bar{1},98466$$
$$-\log \sin \varphi = 0,10302$$
$$\log A = \bar{1},98523$$

$$a = 123^\circ\, 48'\, 10''$$
$$\varphi = 52^\circ\ \ 4'\, 30''$$
$$a + \varphi = 175^\circ\, 52'\, 40''$$
$$180^\circ - (a + \varphi) = 4^\circ\ \ 7'\, 20''$$

Calcul de $\log \sin (a + \varphi)$.

$\Delta = 175$

$4^\circ\, 7'$	$\bar{2},85605$
$20''$	$58,3$

$$\log \sin (a + \varphi) = \bar{2},85663$$

Calcul de x.

$$\log A = \bar{1},98523$$
$$\log \sin (a + \varphi) = \bar{2},85663$$
$$- \log \cos^2 \theta = 0,01888$$

$\Delta = 173$

$$\log \sin x = \bar{2},86074$$

85955	$4^\circ\, 9'$
119	
$115,3$	$40''$
$3,7$	$1''$

$$x = 4^\circ\, 9'\, 41''.$$

II. Calcul de y.

Des formules données on déduit facilement

$$\sin^2 x + \sin^2 y = 1, \qquad \sin y = \pm \cos x.$$

Or, la valeur de $\sin y$ étant négative, on a

$$\sin y = - \cos x \qquad \text{et} \qquad y = - 90^\circ + x,$$

ou

$$y = - 85^\circ\, 50'\, 19''.$$

III. Calcul de z.

On a $\qquad k^2 \sin^2 x + \sin^2 z = 1, \qquad \cos^2 z = k^2 \sin^2 x.$

On voit aisément que la valeur de $\sin z$ est positive, donc l'angle z est compris entre 0 et 90°, et défini par la relation

$$\cos z = k \sin x \qquad \text{ou} \qquad \sin z' = k \sin x \qquad (z' = 90^\circ - z)$$

$$\log k = \bar{1},49730$$
$$\log \sin x = \bar{2},86074$$
$$\log \sin z' = \bar{2},35804$$
$$- \log \frac{\sin z'}{z'} = 5,31446$$
$$\log z' = 3,67250 \qquad z' = 4704'' = 1^\circ\, 18'\, 24''$$
$$z = 88^\circ\, 41'\, 36''$$

Résultats.

$$x = 4^\circ\, 9'\, 41'',$$
$$y = -85^\circ\, 50'\, 19'',$$
$$z = 88^\circ\, 41'\, 36''.$$

201. *On donne les angles*

$$a = 120^\circ\, 38'\, 27'', \qquad b = 81^\circ\, 12'\, 35'', \qquad c = 47^\circ\, 11'\, 14''.$$

Calculer les angles A, B, C *et* φ, *compris entre* 0 *et* 180°, *qui vérifient les formules*

$$\operatorname{tg}\frac{A}{2} = \sqrt{\frac{\sin(p-b)\sin(p-c)}{\sin p \sin(p-a)}},$$

$$\operatorname{tg}\frac{B}{2} = \sqrt{\frac{\sin(p-c)\sin(p-a)}{\sin p \sin(p-b)}}$$

$$\operatorname{tg}\frac{C}{2} = \sqrt{\frac{\sin(p-a)\sin(p-b)}{\sin p \sin(p-c)}},$$

$$\cot\varphi = \frac{\sin(B+C-A)\sin(C+A-B)\sin(A+B-C)}{\sin(A+B+C)},$$

dans lesquelles on désigne par $2p$ *la somme* $a+b+c$.

(*École Navale,* 1911.)

Nous introduirons la quantité auxiliaire

$$m = \sqrt{\frac{\sin(p-a)\sin(p-b)\sin(p-c)}{\sin p}}.$$

Les formules de l'énoncé deviennent alors

$$\operatorname{tg}\frac{A}{2} = \frac{m}{\sin(p-a)}, \quad \operatorname{tg}\frac{B}{2} = \frac{m}{\sin(p-b)}, \quad \operatorname{tg}\frac{C}{2} = \frac{m}{\sin(p-c)}.$$

$$\begin{aligned}
a &= 120^\circ\,38'\,27''\\
b &= 81^\circ\,12'\,35''\\
c &= 47^\circ\,11'\,14''\\
\hline
2p &= 249^\circ\,02'\,16''\\
p &= 124^\circ\,31'\,08''\\
180^\circ - p &= 55^\circ\,28'\,52''\\
p - a &= 3^\circ\,52'\,41''\\
p - b &= 43^\circ\,18'\,33''\\
p - c &= 77^\circ\,19'\,54''
\end{aligned}$$

Calcul de $\log \sin p$.

$\Delta = 9$

$55^\circ\,28'$	$\bar{1},91582$
$50''$	$7,5$
$2''$	$0,3$

$\log \sin p = \bar{1},91590$

Calcul de $\log \sin (p - a)$.

$p - a = 3^\circ\,52'\,41'' = 13\,961''$

$\Delta = 31$

1396	14489
1	3,1

$\log 13961 = 4,14492$

$\log \dfrac{\sin}{\text{arc}} = \bar{6},68524$

$\log \sin (p - a) = \bar{2},83016$

Calcul de $\log \sin (p - b)$.

$\Delta = 13$

$43^\circ\,18'$	$\bar{1},83621$
$30''$	$6,5$
$3''$	$0,65$

$\log \sin (p - b) = \bar{1},83628$

Calcul de $\log \sin (p - c)$.

$\Delta = 3$

$77^\circ\,19'$	$\bar{1},98927$
$50''$	$2,5$
$4''$	$0,2$

$\log \sin (p - c) = \bar{1},98930$

Calcul de $\log m$.

$$\begin{aligned}
\log \sin (p - a) &= \bar{2},83016\\
\log \sin (p - b) &= \bar{1},83628\\
\log \sin (p - c) &= \bar{1},98930\\
-\log \sin p &= 0,08410\\
\hline
2 \log m &= \bar{2},73984\\
\log m &= \bar{1},36992
\end{aligned}$$

Calcul de A.

$$\begin{aligned}
\log m &= \bar{1},36992\\
-\log \sin (p - a) &= 1,16984\\
\hline
\log \operatorname{tg} \frac{A}{2} &= 0,53976
\end{aligned}$$

$\Delta = 48$

65	$73^\circ\,54'$
11	
8	$10''$
3	$4''$

$\dfrac{A}{2} = 73^\circ\,54'\,14''$

$A = 147^\circ\,48'\,28''.$

Calcul de B.

$$\log m = \bar{1},36992$$
$$-\log \sin (p-b) = 0,16372$$
$$\Delta = 41$$
$$\log \operatorname{tg} \frac{B}{2} = \bar{1},53364$$

27	18° 51′
37	
34,2	50″
2,8	4″

$$\frac{B}{2} = 18^\circ\, 51'\, 54''$$
$$B = 37^\circ\, 43'\, 48''$$

Calcul de C.

$$\log m = \bar{1},36992$$
$$-\log \sin (p-c) = 0,01070$$
$$\Delta = 56$$
$$\log \operatorname{tg} \frac{C}{2} = \bar{1},38062$$

35	13° 30′
27	
18,7	20″
8,3	9″

$$\frac{C}{2} = 13^\circ\, 30'\, 29''$$
$$C = 27^\circ\, 00'\, 58''$$

$$A = 147^\circ\, 48'\, 28''$$
$$B = 37^\circ\, 43'\, 48''$$
$$C = 27^\circ\, 00'\, 58''$$

$$\sigma = A + B + C = 212^\circ\, 33'\, 14''$$
$$\alpha = B + C - A = -83^\circ\, 03'\, 42''$$
$$\beta = C + A - B = 137^\circ\, 05'\, 38''$$
$$\gamma = A + B - C = 158^\circ\, 31'\, 18''$$

Les sinus de σ et de α sont négatifs, ceux de β et de γ sont positifs; donc, $\cot \varphi$ est positif et on peut écrire

$$\cot \varphi = \frac{\sin |\alpha| \sin \beta \sin \gamma}{|\sin \sigma|}.$$

Calcul de $\log |\sin \sigma|$.

$$\sigma - 180^\circ = 32^\circ\, 33'\, 14''$$
$$\Delta = 20$$

32° 33′	$\bar{1}$,73081
10″	3,3
4″	1,33

$$\log |\sin \sigma| = \bar{1},73086$$

Calcul de $\log \sin \beta$.

$$180^\circ - \beta = 42^\circ\, 54'\, 22''$$
$$\Delta = 13$$

42° 54′	$\bar{1}$,83297
20″	4,3
2″	0,43

$$\log \sin \beta = \bar{1},83302$$

Calcul de $\log \sin \gamma$.

$$180^\circ - \gamma = 21^\circ\, 28'\, 42''$$
$$\Delta = 32$$

21° 28′	$\bar{1}$,56343
40″	21,3
2″	1,07

$$\log \sin \gamma = \bar{1},56365$$

Calcul de φ.

$$\log \sin |\alpha| = \bar{1},99681$$
$$\log \sin \beta = \bar{1},83302$$
$$\log \sin \gamma = \bar{1},56365$$
$$-\log |\sin \sigma| = 0,26914$$
$$\Delta = 33$$
$$\log \cot \varphi = \bar{1},66262$$

71	65° 18′
9	
5,5	10″
3,5	6″

$$\varphi = 65^\circ\, 18'\, 16''.$$

Résultats.

$$A = 147^\circ\, 48'\, 28'',$$
$$B = 37^\circ\, 43'\, 48'',$$
$$C = 27^\circ\, 00'\, 58'',$$
$$\varphi = 65^\circ\, 18'\, 16''.$$

202. *On donne les angles*

$$a = 50^\circ\, 10'\, 30'',$$
$$b = 40^\circ\, 00'\, 10'',$$
$$C = 121^\circ\, 36'\, 20''.$$

Calculer les angles A, B, *c par les formules*

$$\operatorname{tg} \frac{A+B}{2} = \cot \frac{C}{2} \frac{\cos \frac{a-b}{2}}{\cos \frac{a+b}{2}},$$

$$\operatorname{tg} \frac{A-B}{2} = \cot \frac{C}{2} \frac{\sin \frac{a-b}{2}}{\sin \frac{a+b}{2}},$$

$$\operatorname{tg} \frac{c}{2} = \operatorname{tg} \frac{a-b}{2} \frac{\sin \frac{A+B}{2}}{\sin \frac{A-B}{2}};$$

A, B, *c sont compris entre* 0 *et* 180°.

(*École Navale*, 1912.)

Calcul de $\log \cot \frac{C}{2}$,

$$\frac{C}{2} = 60^\circ\, 48'\, 10''$$

$\Delta = 30$

$60^\circ\, 49'$	$\bar{1},74702$
$50''$	25
$\log \cot \frac{C}{2}$	$\bar{1},74727$

Calcul de $\log \cos \frac{a-b}{2}$.

$$a - b = 10^\circ\, 10'\, 20''$$
$$\frac{a-b}{2} = 5^\circ\, 5'\, 10''$$
$$\log \cos \frac{a-b}{2} = \bar{1},99829$$

Calcul de $\log \sin \dfrac{a-b}{2}$.

$$\Delta = 141$$

$$\begin{array}{lr} 5^\circ\, 5' & \bar{2},94746 \\ 10'' & 23,5 \\ \hline \end{array}$$

$$\log \sin \frac{a-b}{2} = \bar{2},94770$$

Calcul de $\log \cos \dfrac{a+b}{2}$.

$$a+b = 90^\circ\, 10'\, 40''$$

$$\frac{a+b}{2} = 45^\circ\, 05'\, 20''$$

$$\Delta = 12$$

$$\begin{array}{lr} 45^\circ\, 06' & \bar{1},84873 \\ 40'' & 8 \\ \hline \end{array}$$

$$\log \cos \frac{a+b}{2} = \bar{1},84881$$

Calcul de $\log \sin \dfrac{a+b}{2}$.

$$\Delta = 12$$

$$\begin{array}{lr} 45^\circ\, 05' & \bar{1},85012 \\ 20'' & 4 \\ \hline \end{array}$$

$$\log \sin \frac{a+b}{2} = \bar{1},85016$$

Calcul de $\dfrac{A+B}{2}$.

$$\log \cot \frac{C}{2} = \bar{1},74727$$

$$\log \cos \frac{a-b}{2} = \bar{1},99829$$

$$-\log \cos \frac{a+b}{2} = 0,15119$$

$$\Delta = 26$$

$$\log \operatorname{tg} \frac{A+B}{2} = \bar{1},89675$$

$$\begin{array}{cr} \frac{1}{4} & \begin{array}{r} 38^\circ\, 15' \\ 09'' \end{array} \end{array}$$

$$\frac{A+B}{2} = 38^\circ\, 15'\, 09''.$$

Calcul de $\dfrac{A-B}{2}$.

$$\log \cot \frac{C}{2} = \bar{1},74727$$

$$\log \sin \frac{a-b}{2} = \bar{2},94770$$

$$-\log \sin \frac{a+b}{2} = 0,14984$$

$$\Delta = 182$$

$$\log \operatorname{tg} \frac{A-B}{2} = \bar{2},84481$$

$$\begin{array}{rr} 64 & 4^\circ\, 00' \\ \hline 17 & 05'' \end{array}$$

$$\frac{A-B}{2} = 4^\circ\, 00'\, 05''.$$

Calcul de A *et* B.

$$\frac{A+B}{2} = 38^\circ\, 15'\, 09''$$

$$\frac{A-B}{2} = 4^\circ\, 00'\, 05''$$

$$A = 42^\circ\, 15'\, 14'',$$

$$B = 34^\circ\, 15'\, 04''.$$

Calcul de $\log \sin \dfrac{A+B}{2}$.

$$\Delta = 16$$

$$\begin{array}{lr} 38^\circ\, 15' & \bar{1},79176 \\ 09'' & 2,4 \\ \hline \end{array}$$

$$\log \sin \frac{A+B}{2} = \bar{1},79178$$

Calcul de $\log \sin \dfrac{A-B}{2}$.

$$\Delta = 181$$

$$\begin{array}{lr} 4^\circ\, 00' & \bar{2},84358 \\ 05'' & 15,08 \\ \hline \end{array}$$

$$\log \sin \frac{A-B}{2} = \bar{2},84373$$

Calcul de c.

$$\log \sin \frac{a-b}{2} = \bar{2},94770$$

$$-\log \cos \frac{a-b}{2} = 0,00171$$

$$\log \sin \frac{A+B}{2} = \bar{1},79178$$

$$-\log \sin \frac{A-B}{2} = \bar{1},15627 \qquad \Delta = 26$$

$$\log \operatorname{tg} \frac{c}{2} = \bar{1},89746$$

$$\begin{array}{rr} 23 & 38^\circ 17' \\ \hline 23 & \\ 21,7 & 50'' \\ \hline 1,3 & 3'' \end{array}$$

$$\frac{c}{2} = 38^\circ\, 17'\, 53''$$

$$c = 76^\circ\, 35'\, 46''.$$

Résultats.

$$A = 42^\circ\, 15'\, 14'',$$
$$B = 34^\circ\, 15'\, 04'',$$
$$c = 76^\circ\, 35'\, 46''.$$

203. *Calculer les angles* A, A′, B, B′, C, C′, *compris entre* 0 *et* 180°, *donnés par les relations*

$$\frac{A+A'}{2} = 90^\circ + a, \qquad \operatorname{tg} \frac{A-A'}{2} = \cot a \cos \varphi, \qquad a = 25^\circ\, 13'\, 25'',$$

$$\frac{B+B'}{2} = 90^\circ + b, \qquad \operatorname{tg} \frac{B-B'}{2} = \cot b \cos \varphi, \qquad b = 40^\circ\, 28'\, 14'',$$

$$\frac{C+C'}{2} = 90^\circ + c, \qquad \operatorname{tg} \frac{C-C'}{2} = \cot c \cos \varphi, \qquad c = 58^\circ\, 43'\, 11'',$$

$$\operatorname{tg} \varphi = \frac{2\sqrt{\cos p \cos(p-a) \cos(p-b) \cos(p-c)}}{\sin a \sin b \sin c},$$

$$2p = a + b + c.$$

Calcul de $\log \sin \frac{a-b}{2}$.

$\Delta = 141$

$5^\circ\ 5'$	$\bar{2},94746$
$10''$	$23,5$

$$\log \sin \frac{a-b}{2} = \bar{2},94770$$

Calcul de $\log \cos \frac{a+b}{2}$.

$$a+b = 90^\circ\ 10'\ 40''$$

$$\frac{a+b}{2} = 45^\circ\ 05'\ 20''$$

$\Delta = 12$

$45^\circ\ 06'$	$\bar{1},84873$
$40''$	8

$$\log \cos \frac{a+b}{2} = \bar{1},84881$$

Calcul de $\log \sin \frac{a+b}{2}$.

$\Delta = 12$

$45^\circ\ 05'$	$\bar{1},85012$
$20''$	4

$$\log \sin \frac{a+b}{2} = \bar{1},85016$$

Calcul de $\frac{A+B}{2}$.

$$\log \cot \frac{C}{2} = \bar{1},74727$$

$$\log \cos \frac{a-b}{2} = \bar{1},99829$$

$$-\log \cos \frac{a+b}{2} = 0,15119$$

$\Delta = 26$

$$\log \operatorname{tg} \frac{A+B}{2} = \bar{1},89675$$

1	$38^\circ\ 15'$
4	$09''$

$$\frac{A+B}{2} = 38^\circ\ 15'\ 09''.$$

Calcul de $\frac{A-B}{2}$.

$$\log \cot \frac{C}{2} = \bar{1},74727$$

$$\log \sin \frac{a-b}{2} = \bar{2},94770$$

$$-\log \sin \frac{a+b}{2} = 0,14984$$

$\Delta = 182$

$$\log \operatorname{tg} \frac{A-B}{2} = \bar{2},84481$$

64	$4^\circ\ 00'$
17	$05''$

$$\frac{A-B}{2} = 4^\circ\ 00'\ 05''.$$

Calcul de A *et* B.

$$\frac{A+B}{2} = 38^\circ\ 15'\ 09''$$

$$\frac{A-B}{2} = 4^\circ\ 00'\ 05''$$

$$A = 42^\circ\ 15'\ 14'',$$

$$B = 34^\circ\ 15'\ 04''.$$

Calcul de $\log \sin \frac{A+B}{2}$.

$\Delta = 16$

$38^\circ\ 15'$	$\bar{1},79176$
$09''$	$2,4$

$$\log \sin \frac{A+B}{2} = \bar{1},79178$$

Calcul de $\log \sin \frac{A-B}{2}$.

$\Delta = 181$

$4^\circ\ 00'$	$\bar{2},84358$
$05''$	$15,08$

$$\log \sin \frac{A-B}{2} = \bar{2},84373$$

Calcul de c.

$$\log \sin \frac{a-b}{2} = \bar{2},94770$$

$$-\log \cos \frac{a-b}{2} = 0,00171$$

$$\log \sin \frac{A+B}{2} = \bar{1},79178$$

$$-\log \sin \frac{A-B}{2} = \bar{1},15627 \qquad \Delta = 26$$

$$\log \operatorname{tg} \frac{c}{2} = \bar{1},89746$$

$$\begin{array}{rl} 23 & 38^\circ 17' \\ \hline 23 & \\ 21,7 & 50'' \\ \hline 1,3 & 3'' \end{array}$$

$$\frac{c}{2} = 38^\circ\, 17'\, 53''$$

$$c = 76^\circ\, 35'\, 46''.$$

Résultats.

$$A = 42^\circ\, 15'\, 14'',$$
$$B = 34^\circ\, 15'\, 04'',$$
$$c = 76^\circ\, 35'\, 46''.$$

203. *Calculer les angles* A, A′, B, B′, C, C′, *compris entre* 0 *et* 180°, *donnés par les relations*

$$\frac{A+A'}{2} = 90^\circ + a, \qquad \operatorname{tg} \frac{A-A'}{2} = \cot a \cos \varphi, \qquad a = 25^\circ\, 13'\, 25'',$$

$$\frac{B+B'}{2} = 90^\circ + b, \qquad \operatorname{tg} \frac{B-B'}{2} = \cot b \cos \varphi, \qquad b = 40^\circ\, 28'\, 14'',$$

$$\frac{C+C'}{2} = 90^\circ + c, \qquad \operatorname{tg} \frac{C-C'}{2} = \cot c \cos \varphi, \qquad c = 58^\circ\, 43'\, 11'',$$

$$\operatorname{tg} \varphi = \frac{2\sqrt{\cos p \cos(p-a) \cos(p-b) \cos(p-c)}}{\sin a \sin b \sin c},$$

$$2p = a + b + c.$$

Calcul de log sin A′.

$$180^\circ - A' = 87^\circ\,29'\,25''$$

$$\log \sin A' = \bar{1},99958$$

Calcul de $\log \dfrac{\sin A}{\sin A'}$.

$$\log \sin A = \bar{1},82603$$
$$-\log \sin A' = 0,00042$$

$$\log \sin \frac{A}{A'} = \bar{1},82645$$

Calcul de log sin B.

$$180^\circ - B = 36^\circ\,30'\,59'' \qquad \Delta = 17$$

36° 30′	$\bar{1}$,77439
50″	14,2
9″	2,6

$$\log \sin B = \bar{1},77456$$

Calcul de log sin B′.

$$180^\circ - B' = 62^\circ\,32'\,33'' \qquad \Delta = 7$$

62° 32′	$\bar{1}$,94806
30″	3,5
3″	0,35

$$\log \sin B' = \bar{1},94810$$

Calcul de $\log \dfrac{\sin B}{\sin B'}$.

$$\log \sin B = \bar{1},77456$$
$$-\log \sin B' = 0,05190$$

$$\log \frac{\sin B}{\sin B'} = \bar{1},82646$$

Calcul de log sin C.

$$180^\circ - C = 24^\circ\,26'\,57'' \qquad \Delta = 2$$

24° 26′	$\bar{1}$,61662
50″	22,5
7″	3,2

$$\log \sin C = \bar{1},61688$$

Calcul de log sin C′.

$$180^\circ - C' = 38^\circ\,06'\,41'' \qquad \Delta = 1$$

38° 06′	$\bar{1}$,79031
40″	10,7
1″	0,27

$$\log \sin C' = \bar{1},79042$$

Calcul de $\log \dfrac{\sin C}{\sin C'}$,

$$\log \sin C = \bar{1},61688$$
$$-\log \sin C' = 0,20958$$

$$\log \frac{\sin C}{\sin C'} = \bar{1},82646$$

Résultats.

$A = 137^\circ\,56'\,15''$,	$B = 143^\circ\,29'\,01''$,	$C = 155^\circ\,33'\,03''$,
$A' = 92^\circ\,30'\,35''$,	$B' = 117^\circ\,27'\,27''$,	$C' = 141^\circ\,53'\,19''$.

204. *Un observateur placé en* C, *à une distance*

$$OC = 1\,348^{m},27$$

du centre O *de la grande roue de Paris, voit les deux rayons* OA *et* OB *de cette roue situés sur un même diamètre* AB, *sous des angles* $\alpha = 1^\circ\,5'\,51''$, $\beta = 1^\circ\,1'\,45''$.

Déduire de ces données le diamètre de cette roue, ainsi que les valeurs des angles BAC *et* ABC.

On se servira des tables de logarithmes relatives au calcul des petits angles.

(*École des Ponts et Chaussées, Cours spéciaux,* 1898.)

Désignons par R le rayon de la roue et par A, B les angles BAC, ABC respectivement. Dans les triangles OAC et OBC on a

$$\frac{\sin A}{OC} = \frac{\sin \alpha}{R}, \qquad \frac{\sin B}{OC} = \frac{\sin \beta}{R};$$

nous en tirons

$$\frac{\sin A}{\sin \alpha} = \frac{\sin B}{\sin \beta} = \frac{\sin A + \sin B}{\sin \alpha + \sin \beta} = \frac{\sin A - \sin B}{\sin \alpha - \sin \beta},$$

ou

$$\frac{2 \sin \frac{A+B}{2} \cos \frac{A-B}{2}}{2 \sin \frac{\alpha+\beta}{2} \cos \frac{\alpha-\beta}{2}} = \frac{2 \sin \frac{A-B}{2} \cos \frac{A+B}{2}}{2 \sin \frac{\alpha-\beta}{2} \cos \frac{\alpha+\beta}{2}},$$

ou

$$\operatorname{tg} \frac{A-B}{2} = \operatorname{tg} \frac{A+B}{2} \cdot \frac{\operatorname{tg} \frac{\alpha-\beta}{2}}{\operatorname{tg} \frac{\alpha+\beta}{2}}.$$

D'autre part, on a $A + B = 180^\circ - (\alpha + \beta)$, on aura donc

$$(1) \qquad \frac{A+B}{2} = 90^\circ - \frac{\alpha+\beta}{2},$$

$$(2) \qquad \operatorname{tg}\frac{A-B}{2} = \frac{\operatorname{tg}\frac{\alpha-\beta}{2}}{\operatorname{tg}^2\frac{\alpha+\beta}{2}},$$

$$(3) \qquad R = OC \cdot \frac{\sin\alpha}{\sin A} = OC\frac{\sin\beta}{\sin B}.$$

Les formules (1), (2), (3) résolvent le problème.

$\alpha - \beta = 4' \, 06''$

$\frac{\alpha-\beta}{2} = 2' \, 03'' = 123''$

$\alpha + \beta = 2^\circ \, 07' \, 36''$

$\frac{\alpha+\beta}{2} = 1^\circ \, 03' \, 48''$

$\frac{\alpha+\beta}{2} = 3600'' + 180'' + 48'' = 3828''$

Calcul de $\log \operatorname{tg} \frac{\alpha-\beta}{2}$.

$\log \frac{\alpha-\beta}{2} = 2,08991$

$\log \frac{\operatorname{tg}}{\operatorname{arc}} = \bar{6},68557$

$\log \operatorname{tg} \frac{\alpha-\beta}{2} = \bar{4},77548$

Calcul de $\log \operatorname{tg} \frac{\alpha+\beta}{2}$.

$\log \frac{\alpha+\beta}{2} = 3,58297$

$\log \frac{\operatorname{tg}}{\operatorname{arc}} = \bar{6},68562$

$\log \operatorname{tg} \frac{\alpha+\beta}{2} = \bar{2},26859$

$2 \log \operatorname{tg} \frac{\alpha+\beta}{2} = \bar{4},53718$

Calcul de A *et* B.

$\log \operatorname{tg} \frac{\alpha-\beta}{2} = \bar{4},77548$

$-2 \log \operatorname{tg} \frac{\alpha+\beta}{2} = 3,46282$

$\log \operatorname{tg} \frac{A-B}{2} = 0,23830$

$\Delta = 2$

$\frac{827}{3}$ $\quad 59^\circ \, 59'$

06

$\frac{A-B}{2} = 59^\circ \, 59' \, 06''$

$\frac{A+B}{2} = 88^\circ \, 56' \, 12''$

$A = 148^\circ \, 55' \, 18''$

$B = 28^\circ \, 57' \, 06''$

Calcul de $\log OC$.

$\Delta = 3$

4348	12969
2	6,4
7	2,24

$\log OC = 3,12978$

Calcul de $\log \sin \alpha$.

$\alpha = 1^\circ \, 05' \, 51''$

$\alpha = 3600'' + 300'' + 51'' = 3951''$

$\log \alpha = 3,59671$

$\log \frac{\sin}{\operatorname{arc}} = \bar{6},68555$

$\log \sin \alpha = \bar{2},28226$

Calcul de log sin A.

$$A = 148^\circ\,55'\,18''$$
$$180^\circ - A = 31^\circ\,04'\,42''$$

$\Delta = 21$

$31^\circ\,04'$	$\bar{1},71268$
$40''$	14
$2''$	$0,7$

$$\log \sin A = \bar{1},71283$$

Calcul de R.

$$\log OC = 3,42978$$
$$\log \sin \alpha = \bar{2},28226$$
$$-\log \sin A = 0,28717$$
$$\log R = 1,69921$$

$\Delta = 9$

14	5002
7	8

$$R = 50,028$$

Vérification.

Calcul de log sin β.

$$\beta = 1^\circ\,01'\,45''$$
$$\beta = 3600'' + 60'' + 45'' = 3705''$$
$$\log \beta = 3,56879$$
$$\log \frac{\sin}{\text{arc}} = \bar{6},68555$$
$$\log \sin \beta = \bar{2},25434$$

Calcul de log sin B.

$\Delta = 23$

$28^\circ\,57'$	$\bar{1},68489$
$06''$	$2,3$

$$\log \sin B = \bar{1},68491$$

Calcul de R.

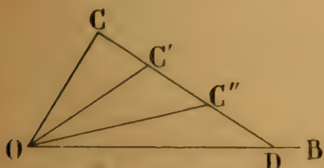
$$\log OC = 3,42978$$
$$\log \sin \beta = \bar{2},25434$$
$$-\log \sin B = 0,31509$$
$$\log R = 1,69921$$

Résultats.

$$\widehat{BAC} = 148^\circ\,55'\,18'', \qquad \widehat{ABC} = 28^\circ\,57'\,06'';$$

le diamètre de la roue est égal à $100^m,056$.

205. *Un observateur situé en un point* O *d'un rivage rectiligne* AB *observe un navire qui occupe successivement les positions* C, C′, C″, *aux trois époques* t, t', t''.



L'observateur mesure les angles COB, C′OB, C″OB *que font les rayons visuels* OC, OC′, OC″ *avec la direction du rivage. D'autre part, la vitesse* v *du navire est supposée constante et connue.*

Cela posé, on demande de déterminer par la distance OD = x *le point* D *du rivage vers lequel se dirige le navire et l'époque* T *à laquelle il atteindra ce point.*

Faire le calcul dans le cas où :

$$\widehat{COB} = 79^\circ\,28'\,30'', \qquad \widehat{C'OB} = 62^\circ\,11'\,13'', \qquad \widehat{C''OB} = 47^\circ\,8'\,27'',$$
$$v = 16^{km} \text{ à l'heure}, \quad t = \text{midi } 20^m, \quad t' = \text{midi } 40^m, \quad t'' = 1^h.$$

(*École des Ponts et Chaussées*, 1894.)

Soient $COD = \alpha$, $C'OD = \beta$, $C''OD = \gamma$ et $CDO = \lambda$. On a

$$\frac{CD}{\sin\alpha} = \frac{x}{\sin(\alpha+\lambda)}, \qquad \frac{C'D}{\sin\beta} = \frac{x}{\sin(\beta+\lambda)}, \qquad \frac{C''D}{\sin\gamma} = \frac{x}{\sin(\gamma+\lambda)},$$

et $\quad CD = v(T-t), \qquad C'D = v(T-t'), \qquad C''D = v(T-t'').$

On en déduit

$$T = t + \frac{x\sin\alpha}{v\sin(\alpha+\lambda)} = t' + \frac{x\sin\beta}{v\sin(\beta+\lambda)} = t'' + \frac{x\sin\gamma}{v\sin(\gamma+\lambda)},$$

trois équations pour déterminer λ, x, T.

Calculons d'abord λ. Les deux dernières équations peuvent s'écrire

$$t'-t = \frac{x}{v}\left[\frac{\sin\alpha}{\sin(\alpha+\lambda)} - \frac{\sin\beta}{\sin(\beta+\lambda)}\right] = \frac{x}{v}\cdot\frac{\sin\lambda\sin(\alpha-\beta)}{\sin(\alpha+\lambda)\sin(\beta+\lambda)},$$
$$t''-t = \frac{x}{v}\left[\frac{\sin\alpha}{\sin(\alpha+\lambda)} - \frac{\sin\gamma}{\sin(\gamma+\lambda)}\right] = \frac{x}{v}\cdot\frac{\sin\lambda\sin(\alpha-\gamma)}{\sin(\alpha+\lambda)\sin(\gamma+\lambda)},$$

d'où l'on déduit

$$\frac{\sin(\beta+\lambda)}{\sin(\gamma+\lambda)} = \frac{\sin(\alpha-\beta)}{\sin(\alpha-\gamma)}\cdot\frac{t''-t}{t'-t}.$$

Posons $$\operatorname{tg}\varphi = \frac{\sin(\alpha-\beta)}{\sin(\alpha-\gamma)}\cdot\frac{t''-t}{t'-t},$$

l'équation peut s'écrire

$$\frac{\sin(\beta+\lambda)-\sin(\gamma+\lambda)}{\sin(\beta+\lambda)+\sin(\gamma+\lambda)} = \frac{\operatorname{tg}\varphi - 1}{1+\operatorname{tg}\varphi} = \operatorname{tg}(\varphi - 45^\circ),$$

d'où $$\operatorname{tg}\left(\frac{\beta+\gamma}{2}+\lambda\right) = \frac{\operatorname{tg}\dfrac{\beta-\gamma}{2}}{\operatorname{tg}(\varphi-45^\circ)}.$$

Connaissant λ, on aura x et T par les formules

$$x = v(t' - t) \cdot \frac{\sin(\alpha + \lambda)\sin(\beta + \lambda)}{\sin\lambda \cdot \sin(\alpha - \beta)}, \qquad T - t = \frac{x \sin\alpha}{v \cdot \sin(\alpha + \lambda)}.$$

En faisant le calcul, on trouvera

$$\log \operatorname{tg} \varphi = 0{,}04580, \qquad \varphi = 48^\circ\, 0'\, 56'',$$

$$\log \operatorname{tg}\left(\frac{\beta + \gamma}{2} + \lambda\right) = 0{,}39913, \qquad \lambda = 13^\circ\, 35'\, 20''.$$

$$\log x = 1{,}86887, \qquad x = 73^{\text{km}}{,}938,$$

$$\log(T - t) = 0{,}65800, \qquad T - t = 4^{\text{h}}33^{\text{m}}, \qquad T = 4^{\text{h}}53^{\text{m}}.$$

206. *Connaissant*

$$a = 41^\circ\, 09'\, 49'', \qquad b = 123^\circ\, 02'\, 10'', \qquad C = 73^\circ\, 58'\, 40'',$$

calculer les angles A, B, c *par les formules*

$$\operatorname{tg}\frac{A - B}{2} = \cot\frac{C}{2}\,\frac{\sin\dfrac{a-b}{2}}{\sin\dfrac{a+b}{2}}, \qquad \operatorname{tg}\frac{A + B}{2} = \cot\frac{C}{2}\,\frac{\cos\dfrac{a-b}{2}}{\cos\dfrac{a+b}{2}},$$

$$\operatorname{tg}\frac{c}{2} = \frac{\operatorname{tg}\dfrac{a-b}{2}\,\sin\dfrac{A+B}{2}}{\sin\dfrac{A-B}{2}}.$$

Les angles A, B, c *sont compris entre* 0 *et* 180°.

(*École Navale,* 1908.)

On trouve

$$A = 40^\circ\, 54'\, 26'', \qquad B = 123^\circ\, 29'\, 08'', \qquad c = 104^\circ\, 57'\, 32''.$$

207. *Des extrémités* A *et* B *d'une base de longueur connue* AB $= a$, *on a visé un point* M *et mesuré les angles* xAM $= \alpha$ *et* xBM $= \beta$ *que font les droites* AM *et* BM *avec la direction* Ax *de la base* AB.

On demande d'établir les formules donnant l'abscisse AP $= x$ *et l'ordonnée* PM $= y$ *du point* M, *en fonction de* a, α, β.

Application numérique :

$$a = 1\,000^{\text{m}}, \qquad \alpha = 48^\circ\,29', \qquad \beta = 71^\circ\,35'.$$

(*École spéciale des Travaux publics*, 1913.)

On trouve

$$x = \frac{a \sin\beta \cos\alpha}{\sin(\beta - \alpha)} = 1\,602^{\text{m}},96,$$

$$y = \frac{a \sin\beta \sin\alpha}{\sin(\beta - \alpha)} = 1\,810^{\text{m}},71.$$

208. *Données :*

$$a = 33^\circ\,42'\,21'',3,$$
$$b = 52^\circ\,28'\,13'',7,$$
$$c = 68^\circ\,35'\,19'',6.$$

Calculer r, A, B, C, u *au moyen des formules suivantes :*

$$2p = a + b + c, \quad \operatorname{tg} r = \sqrt{\frac{\sin(p-a)\sin(p-b)\sin(p-c)}{\sin p}},$$

$$\operatorname{tg}\frac{A}{2} = \frac{\operatorname{tg} r}{\sin(p-a)}, \qquad \operatorname{tg}\frac{B}{2} = \frac{\operatorname{tg} r}{\sin(p-b)},$$

$$\operatorname{tg}\frac{C}{2} = \frac{\operatorname{tg} r}{\sin(p-c)}, \qquad \sin\frac{u}{2} = \frac{\sin p \operatorname{tg} r}{2\cos\frac{a}{2}\cos\frac{b}{2}\cos\frac{c}{2}}.$$

Vérification : $\quad A + B + C = 180^\circ + u.$

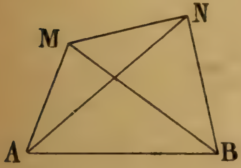
On prendra la plus petite valeur positive pour chaque inconnue.

(*École Navale*, 1919.)

Réponse :

$$r = 12^\circ\,03'\,02'',$$
$$A = 34^\circ\,21'\,18'',$$
$$B = 53^\circ\,45'\,12'',$$
$$C = 108^\circ\,47'\,02'',$$
$$u = 16^\circ\,53'\,28''.$$

209. *Dans le quadrilatère plan* ABMN *où* A, B *sont accessibles, et* M, N *inaccessibles, on a mesuré*



$$a = AB = 2535^m,$$
$$\alpha = \widehat{MAB} = 61^\circ\, 20'\, 35'',$$
$$\beta = \widehat{MBA} = 40^\circ\, 12'\, 8'',$$
$$\gamma = \widehat{NAB} = 38^\circ\, 8'\, 15'',$$
$$\delta = \widehat{NBA} = 80^\circ\, 3'\, 18''.$$

Calculer les distances MN, MA, NA.

(*École des Ponts et Chaussées,* 1887.)

On trouve

$$MA = 1\,670^m,07, \qquad NA = 2833^m, \qquad MN = 1455^m,3.$$

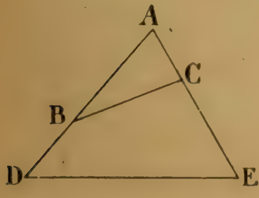
210. *On connaît sur un terrain plan les trois points* B, C, D *et la direction* DE.

On a évalué

la distance $BC = 304^m,919$,
la distance $BD = 122^m,131$,
l'angle $DBC = 161^\circ\, 41'\, 59''$,
l'angle $BDE = 22^\circ\, 18'\, 9''$.

On veut prendre sur la direction DE *un point* E *tel que le triangle* ADE, *obtenu en menant la droite* EC *et en prolongeant cette droite jusqu'à sa rencontre en* A *avec* DB *soit isocèle* (AD = AE).

Calculer la distance DE.



(*École des Ponts et Chaussées,* 1903.)

Dans le triangle ABC nous connaissons le côté BC et les angles A et B, car on a

$$A = 180^\circ - 2\,\widehat{BDE}, \qquad B = 180^\circ - \widehat{DBC}.$$

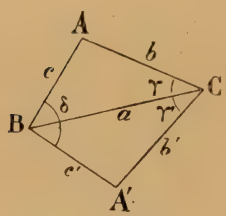
On peut alors calculer le côté AB. On en déduit

$$AD = AB + BD, \qquad \text{et} \qquad DE = 2AD \cos \widehat{ADE}.$$

On trouve ainsi

$$AB = 192^{m},423, \qquad DE = 582^{m},05.$$

211. *Soit le quadrilatère* ABA′C, *les sommets* A *et* A′ *étant opposés. On connaît* $AB = c$, $BA' = c'$, *et* $\widehat{ABA'} = \delta$. *On a mesuré les angles* $ACB = \gamma$, $A'CB = \gamma'$, *sous lesquels on voit* AB *et* A′B *du point* C.



Calculer les éléments des triangles ABC, A′BC.

Application numérique :

$$c = 190^{m}, \quad c' = 235^{m}, \quad \delta = 96°\,32'\,41'',$$
$$\gamma = 35°\,10', \quad \gamma' = 44°\,15'\,27''.$$

(*École des Ponts et Chaussées,* 1910.)

Les éléments inconnus sont les côtés

$$BC = a, \qquad AC = b, \qquad A'C = b'$$

et les angles

$$BAC = A, \qquad BA'C = A'.$$

Nous calculerons en premier lieu A et A′. Nous avons d'abord

$$(1) \qquad \frac{A + A'}{2} = 180° - \frac{\delta + \gamma + \gamma'}{2};$$

puis, des relations

$$\frac{\sin A}{a} = \frac{\sin \gamma}{c}, \qquad \frac{\sin A'}{a} = \frac{\sin \gamma'}{c'}$$

nous déduisons successivement

$$\frac{\sin A}{c' \sin \gamma} = \frac{\sin A'}{c \sin \gamma'} = \frac{\sin A + \sin A'}{c' \sin \gamma + c \sin \gamma'} = \frac{\sin A - \sin A'}{c' \sin \gamma - c \sin \gamma'},$$

$$\operatorname{tg} \frac{A - A'}{2} = \frac{c' \sin \gamma - c \sin \gamma'}{c' \sin \gamma + c \sin \gamma'} \operatorname{tg} \frac{A + A'}{2},$$

ou, en posant

$$\frac{c \sin \gamma'}{c' \sin \gamma} = \operatorname{tg} \varphi, \tag{2}$$

$$\operatorname{tg} \frac{A - A'}{2} = \operatorname{tg}(45^\circ - \varphi) \operatorname{tg} \frac{A + A'}{2}. \tag{3}$$

Les formules (1), (2) et (3) permettent de calculer A et A'
On obtiendra ensuite a, b, b' à l'aide des relations

$$\frac{a}{\sin A} = \frac{b}{\sin (A + \gamma)} = \frac{c}{\sin \gamma},$$

$$\frac{a}{\sin A'} = \frac{b'}{\sin (A' + \gamma')} = \frac{c'}{\sin \gamma'}.$$

Comme vérification on devra obtenir la même valeur de a en la tirant de chacun des groupes de formules.

On trouve d'abord

$$\varphi = 44^\circ 24' 39'', \qquad 45^\circ - \varphi = 35' 21''.$$

On calcule $\log \operatorname{tg}(45^\circ - \varphi)$ en appliquant la méthode des petits arcs ; on obtient

$$\log \operatorname{tg}(45^\circ - \varphi) = \bar{2},01213,$$

D'autre part, on a

$$\frac{A + A'}{2} = 92^\circ 00' 56'' \qquad \text{et} \qquad \operatorname{tg} \frac{A + A'}{2} = \frac{-1}{\operatorname{tg} 2^\circ 00' 56''}$$

et, par suite,

$$\operatorname{tg} \frac{A - A'}{2} = -\frac{\operatorname{tg}(45^\circ - \varphi)}{\operatorname{tg} 2^\circ 00' 56''}.$$

Ceci montre que A est plus petit que A' ; on écrit alors

$$\log \operatorname{tg} \frac{A' - A}{2} = \log \operatorname{tg}(45^\circ - \varphi) - \log \operatorname{tg} 2^\circ 00' 56'' = \bar{1},46568.$$

On en déduit $\quad \dfrac{A' - A}{2} = 16^\circ 17' 18'',$

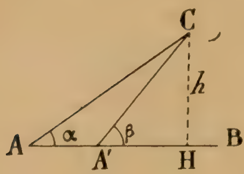
puis

$$A = 75^\circ 43' 38'', \qquad A' = 108^\circ 18' 14'' ;$$

et enfin

$$a = 319^{m},70, \qquad b = 308^{m},20, \qquad b' = 155^{m},17$$

212. *Un observateur situé sur un navire qui se déplace en ligne droite avec une vitesse connue observe à deux époques les angles* α *et* β *que fait avec la direction* AB *de la marche du navire le rayon visuel allant à un point fixe* C *de l'horizon. On demande de calculer à quelle distance du point* C *passera le navire et à quel moment il sera le plus voisin de* C.



Données : $AA' = 6850^m$, $\alpha = 30°\,20'\,03''$, $\beta = 45°\,06'\,27''$; *temps écoulé entre les deux observations, 17 minutes.*

(*École des Ponts et Chaussées, cours spéciaux,* 1896.)

Abaissons CH perpendiculaire sur AB, posons $AA' = d$, $CH = h$, et désignons par t le temps (exprimé en minutes) que met le navire pour parcourir la distance AH.

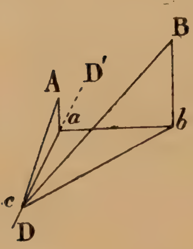
On établira aisément les formules

$$h = d\frac{\sin\alpha\sin\beta}{\sin(\beta-\alpha)}, \qquad t = 17\frac{\cos\alpha\sin\beta}{\sin(\beta-\alpha)}.$$

On trouve

$$h = 9611^m{,}5, \qquad t = 40^m46^s.$$

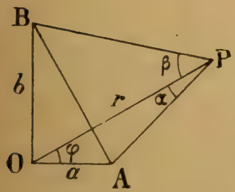
213. *Étant donnés deux monuments* Aa, Bb *dont les hauteurs respectives au-dessus d'un même plan horizontal sont* $h = 30^m{,}25$, $h' = 280^m{,}70$ *et dont la distance* $ab = d$ *est de* $430^m{,}50$, *on demande quelle est la position* c *que doit occuper un spectateur sur l'horizontale* DaD' *perpendiculaire à* ab *pour voir les deux monuments sous le même angle. Calculer cet angle ainsi que la distance* ac.



(*École des Ponts et Chaussées,* 1897.)

L'angle demandé est $36^g{,}6140$, et la distance ac est égale à $46^m{,}666$.

214. AOB *est un triangle rectangle dont les côtés de l'angle droit valent respectivement*



$$OA = a = 20^{m},456,$$
$$OB = b = 32^{m},203.$$

Ces côtés sont vus d'un point P *sous les angles*

$$APO = \alpha = 10'', \quad BPO = \beta = 30^{\circ}\,2'\,15''.$$

Trouver : 1° *l'angle* $\varphi = POA$; 2° *la distance* $r = OP$.

(*École des Mines de Saint-Étienne,* 1904.)

215. *Calculer les côtés et les angles d'un quadrilatère inscriptible* ABDC *connaissant le côté* AB = 25,6097, *la diagonale* BC = 66,5853, *et les angles* ABC = 67° 22′ 48″,48 *et* CBD = 45°.

(*École des Mines de Saint-Étienne,* 1891.)

216. *Calculer les côtés, les angles et la surface du parallélogramme dont on connaît le côté* $AB = 210^{m},367$, *la diagonale* $AC = 184^{m},071$, *et l'angle* BAC = 38° 12′ 47″.

(*École des Mines de Saint-Étienne,* 1896.)

217. *Calculer les côtés et les angles du quadrilatère inscriptible* ABCD, *dont on connaît :*

le côté $AB = 79^{m},518$, *le côté* $BC = 212^{m},048$,
l'angle ABC = 60°, *l'angle* BCD = 51° 47′ 12″,5.

(*École des Mines de Saint-Étienne,* 1894.)

218. *On donne les côtés a, b, c, d d'un quadrilatère inscriptible. Calculer les angles, la surface et les diagonales.*

Application numérique :

$$a = 31^{m}, \qquad b = 16^{m}, \qquad c = 24^{m}, \qquad d = 11^{m}.$$

(*École des Ponts et Chaussées, Cours préparatoires,* 1909.)

Désignons par A, B, C, D les sommets et les angles du quadrilatère, et posons

$$a = AB, \qquad b = BC, \qquad c = CD, \qquad d = DA\,;$$

soient x, y les diagonales

$$x = BD, \qquad y = AC,$$

et S la surface.

En désignant par $2p$ le périmètre $a + b + c + d$, on a les formules connues

$$\operatorname{tg}\frac{A}{2} = \sqrt{\frac{(p-a)(p-d)}{(p-b)(p-c)}}, \qquad \operatorname{tg}\frac{B}{2} = \sqrt{\frac{(p-a)(p-b)}{(p-c)(p-d)}},$$

$$C = \pi - A, \quad D = \pi - B, \quad S = \sqrt{(p-a)(p-b)(p-c)(p-d)},$$

$$x^2 = \frac{(ac+bd)(ab+cd)}{ad+bc}, \qquad y^2 = \frac{(ac+bd)(ad+bc)}{ab+cd}.$$

On peut rendre calculables par logarithmes les valeurs de x et y. Pour cela, on remarque que l'on a

$$ac + bd = (p-a)(p-c) + (p-b)(p-d),$$

et des égalités analogues pour $ab + cd$ et $ad + bc$; on obtient alors aisément

$$x = \frac{(p-a)\cos\frac{A}{2}}{\cos\varphi\sin\frac{B}{2}}, \qquad y = \frac{(p-a)\cos\frac{B}{2}}{\cos\varphi\sin\frac{A}{2}},$$

φ étant un angle aigu défini par l'égalité

$$\operatorname{tg}^2\varphi = \frac{(p-b)(p-d)}{(p-a)(p-c)}.$$

Avec les données numériques de l'énoncé, on trouve

$$A = 88^{g},9692, \qquad B = 77^{g},7728,$$

$$S = 357^{m^2},075,$$

$$x = 31^{m},056, \qquad y = 29^{m},624.$$

TABLE DES MATIÈRES

PREMIÈRE PARTIE

CALCULS ARITHMÉTIQUES

DEUXIÈME PARTIE

CALCULS LOGARITHMIQUES

CHARTRES. — IMPRIMERIE DURAND, RUE FULBERT.

EXTRAIT DU CATALOGUE

DE LA LIBRAIRIE VUIBERT

63, Boulevard Saint-Germain, Paris, 5e.

Pour la majoration temporaire à ajouter aux prix indiqués, consulter le catalogue.

Compléments d'Algèbre et Notions de Géométrie analytique, à l'usage des élèves de Mathématiques spéciales et des candidats aux grandes écoles, par A. Macé de Lépinay, professeur au lycée Henri IV. — Vol. 22/14cm. 6e édition . . . . 10 fr. 50

Théorie des Nombres irrationnels, *des limites et de la continuité*, par René Baire, professeur à l'Université de Dijon. — Vol. 22/14cm. 2e édition. . . . . 2 fr. 25

Cours de Mathématiques spéciales sous forme de problèmes (*Algèbre et analyse, trigonométrie, géométrie analytique, mécanique, géométrie descriptive*), par R. Noguès, professeur honoraire au lycée Janson-de-Sailly. — Vol. 25/16cm. . . . . 15 fr. »

Cours de Géométrie analytique, par G. Bouligand, professeur au lycée de Rennes, avec une préface de M. Cartan, professeur à la Sorbonne. — Vol. 22/14cm de xii-421 pages, avec figures. . . . . . . 16 fr. »

Cours de Géométrie analytique, par W. de Tannenberg, ancien professeur de l'Université de Bordeaux. Publié par fascicules 28/22cm.

1er fascicule : La ligne droite. . . . . 3 fr. 80

2e fascicule : Courbes planes en général [Courbes dont l'équation a la forme $y = f(x)$]. . . . . 3 fr. 80

3e fascicule : Courbes planes en général [Courbes définies par leurs équations paramétriques]. . . . . 3 fr. 80

Cours de Géométrie descriptive, à l'usage des élèves de Mathématiques spéciales et des candidats aux grandes écoles, par X. Antomari, docteur ès sciences, professeur au lycée Carnot. — Vol. 25/16cm, avec épures dans le texte. 5e édition. . . . . 18 fr. »

Problèmes et épures de géométrie descriptive et de géométrie cotée, par N. Charruit, professeur au lycée de Lyon. — Vol. 25/16cm, avec figures et épures dans le texte. 2e édition. . 7 fr. »

Problèmes et épures de géométrie descriptive, à l'usage des candidats au Baccalauréat et aux écoles spéciales, par P. Mineur, professeur au lycée Rollin. — Vol. 22/14cm, avec figures et épures dans le texte. 7 fr. »

Problèmes de Physique et de Chimie, à l'usage des élèves de Mathématiques spéciales et des candidats aux grandes écoles, par Ch. Rivière, docteur ès sciences, professeur au lycée Saint-Louis. — Vol. 22/14cm. 3e édition. . . . . 8 fr. »

Introduction à l'Étude de la Théorie des Nombres et de l'Algèbre supérieure, par E. Borel et J. Drach, d'après des conférences faites à l'école normale supérieure par M. Jules Tannery, directeur des études scientifiques. — Vol. 25/16cm. . . . . 18 fr. »

Revue de Mathématiques spéciales

(31e année : 1920-21),

Rédigée par MM. E. HUMBERT et G. PAPELIER,
avec la collaboration de MM. P. LAMAIRE, J. LEBEL, Ch. RIVIÈRE et H. VUIBERT.

La Revue paraît mensuellement (12 numéros par an, de 24 ou 32 pages), avec figures et épures dans le texte (format 28/22cm.). Les abonnements sont annuels et partent d'octobre. A quelque époque de l'année que l'on s'abonne, on reçoit tous les numéros parus depuis le mois d'octobre précédent.

Abonnement annuel. . . . . 25 fr. »

Journal de Mathématiques élémentaires

publié par **H. VUIBERT** (*45e année*).

Journal 28/22cm, avec figures et épures dans le texte, paraissant le 1er et le 15 de chaque mois, du 1er octobre au 15 juillet.

Abonnement annuel : 10 francs. (On envoie à toute époque de l'année les numéros parus depuis le 1er octobre précédent.)

Éléments de Mathématiques supérieures

à l'usage des physiciens, chimistes et ingénieurs, et des élèves des Facultés des sciences, par H. VOGT, ancien élève de l'école Normale supérieure, professeur à l'Université de Nancy. — Un fort volume 25/16cm avec figures, 9e édition.. . . . . 18 fr. »

Règle à calcul

(Instruction détaillée et méthode pratique pour son emploi)

à l'usage des Ingénieurs, Architectes, Conducteurs de Travaux, etc., par A. DREYSSÉ, ancien chef d'escadron d'Artillerie de Marine, ancien élève de l'école Polytechnique. — Volume 22/14cm, 3e édition.. . . . 6 fr. »

Approximations dans les Mesures physiques

et dans les calculs numériques qui s'y rattachent, par E. COLARDEAU, professeur au collège Rollin. — Un volume 22/14cm, avec 103 figures, 2e édition, broché.. . . . . 10 fr. »

H. VUIBERT (*25e année.*)

ANNUAIRE DE LA JEUNESSE

Moyens de s'instruire. — Choix d'une carrière. — Un volume 18/12cm de 1200 pages ; broché, 6 francs ; cartonné toile, 10 francs.

Dans la première partie : **Éducation et Instruction**, on passe en revue tout ce qui a trait à l'instruction des garçons et des filles à tous ses degrés. L'auteur ne se limite pas, bien entendu, aux établissements universitaires ; il s'étend aussi bien sur tout ce qui a un caractère spécial.

La seconde partie : **Écoles spéciales**, intéresse surtout les jeunes gens qui se destinent aux écoles où l'on va couronner son instruction ; elle leur montre ce que sont ces écoles, les moyens de s'y préparer, les difficultés des concours, la nature de l'enseignement, les débouchés qui s'offrent à la sortie, etc. Le candidat sait ainsi où il va et peut se rendre compte de ses chances de succès.

École des Sciences politiques : Programme d'admission et de l'enseignement. Volume.. . . . . 3 fr. »